بنام خدا
جلسه دوم
ریاضی عمومی
محمدپور

جلسه دوم

- ادامه توابع خاص :

تابع چند ضابطه‌ای : تابعی که روی هر یک از زیرمجموعه‌های اعداد حقیقی یک بازه خاص تعریف می‌کند مثل تابع زیر :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & x < 1 \\ 3x^2+1 & x \geq 1 \end{cases}$$

در تابع فوق دامنه $\mathbb{R}$ می‌باشد و $f(1)+f(-\frac{1}{2})$ به صورت زیر حساب می‌شود :

$$f(1) + f(-\tfrac{1}{2}) = \left(3(1)^2+1\right) + \left(\frac{1}{-\frac{1}{2}-1}\right) = 4 - \frac{2}{3} = \frac{10}{3}$$

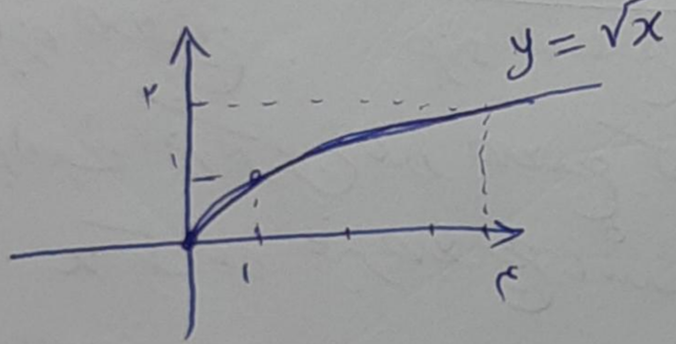
تابع رادیکالی: تابع $f(x)=\sqrt{x}$ که دامنه آن اعداد حقیقی نامنفی و برد آن هم اعداد حقیقی نامنفی یا $\mathbb{R}^{+}_{0}$ می‌باشد.

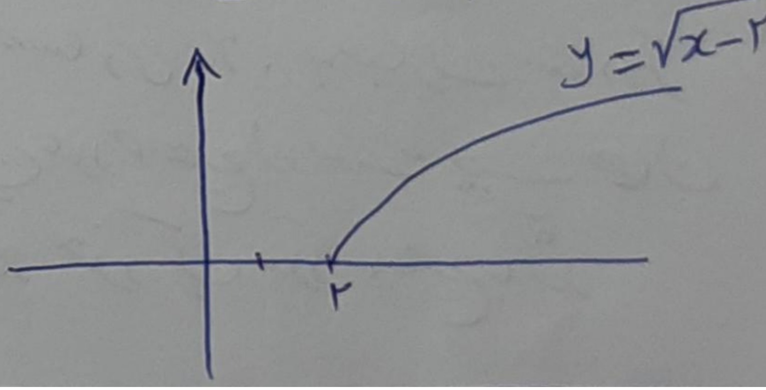
$$f(x)=\sqrt{x-2}$$

دامنه : $x-2 \geq 0$

$x \geq 2$

$\Rightarrow$ دامنه $= [2, +\infty)$





مثال: اگر $f(x)=\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{x}}}$ مقدار $f(64)$ را بیابید.

$$f(64)=\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{64}}}=\sqrt{1+\sqrt{1+8}}=\sqrt{1+3}=2$$

تمرین: نمودار $y=\sqrt{x+2}$ را رسم کنید. دامنه و برد آن را بیابید.

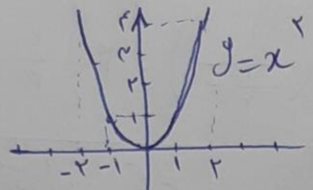
تابع چندجمله‌ای : فرم کلی این تابع به صورت زیر است :

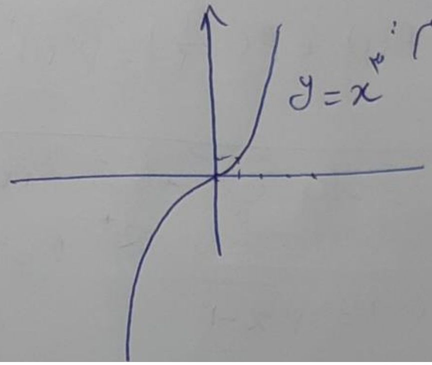
$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$$

مهم‌ترین توابع چندجمله‌ای تابع درجه دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ و تابع درجه سوم $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ می‌باشد مثل :

$f(x) = 2x^2 - 1$ $\qquad g(x) = x^3 - 4x + 1$

در بین این توابع نمودار $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$ را باید فعلاً بلد باشیم :





تابع جزء صحیح : جزء صحیح هر عدد مثل x را با نماد $[x]$ نشان می‌دهیم و برابر است با بزرگترین عدد صحیح کوچکتر یا مساوی x . به عبارت ساده‌تر اگر x یک عدد غیر صحیح باشد نزدیکترین عدد صحیح از سمت چپ همان جزء صحیح عدد x است . در صورتیکه x خود یک عدد صحیح باشد جزء صحیح آن با خود عدد برابر است .

مثال : $[۵]=۵$ $\quad [-۲/۳]=-۳$ $\quad [۶/۷]=۶$

$[\pi]=۳ \quad (\pi=۳/۱۴)$ $\quad [-۲\tfrac{۱}{۵}]=-۳$

$[-\tfrac{۲۱}{۵}]=-۵$

نکات مربوط به جزء صحیح:

① $[x] = n \Rightarrow n \leq x < n+1$

② $0 \leq x - [x] < 1 \Rightarrow$ اختلاف هر عدد با جزء صحیح آن عددی بین صفر و یک است.

③ $[x] + [-x] = \begin{cases} 0 & \text{اگر } x \in \mathbb{Z} \\ -1 & \text{اگر } x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$

مثال: $[۲/۵] + [-۲/۵] = ۲ + (-۳) = -۱$

$[۷] + [-۷] = ۷ + (-۷) = ۰$

مثال: معادله زیر را حل کنید:

$[۲x-۱] = ۷ \Rightarrow ۷ \leq ۲x - ۱ < ۸$

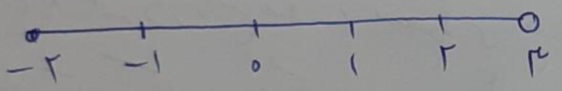
$\Rightarrow ۷+۱ \leq ۲x < ۸+۱ \Rightarrow ۸ \leq ۲x < ۹$

$\Rightarrow ۴ \leq x < ۴/۵ \Rightarrow [۴, ۴/۵)$

مجموعه جواب

برای رسم تابع جزء صحیح $y=[x]$ مثلاً در بازه $[-2,3)$ باید در زیر بازه های یک واحدی مقدار جزء صحیح را محاسبه کرد و پلکانی آن را رسم می کنیم.

$[-2, 3)$



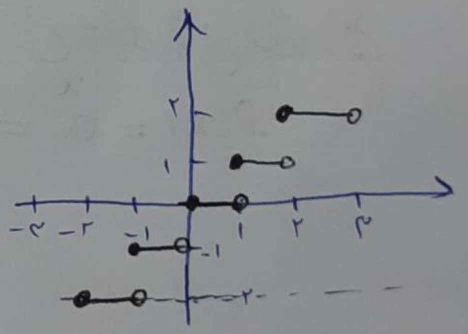
$$-2 \le x < -1 \Rightarrow [x] = -2 \Rightarrow y = -2$$

$$-1 \le x < 0 \Rightarrow [x] = -1 \Rightarrow y = -1$$

$$0 \le x < 1 \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$1 \le x < 2 \Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow y = 1$$

$$2 \le x < 3 \Rightarrow [x] = 2 \Rightarrow y = 2$$



نمودار تابع به صورت پلکانی می باشد.

تابع نمایی: هر تابع به فرم $y=a^x$ که $a>0$ و $a\neq 1$ و $x\in R$ یک تابع نمایی است. مثل:

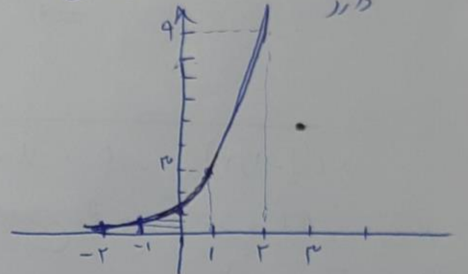
$y=2^x$ $\quad$ $y=(\frac{1}{3})^x = 3^{-x}$ $\quad$ $y=e^x$ $\quad$ $e \simeq 2{,}71$

e = عدد نپر نام دارد.

مثال: رسم تابع $y=2^{-x}$ و $y=3^x$

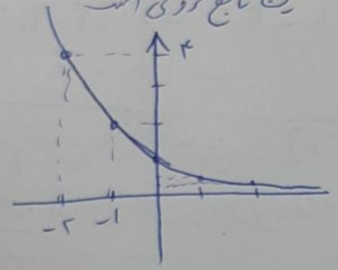
x	-2	-1	0	1	2
$y=3^x$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9

تابع $y=3^x$ با افزایش مقدار x، مقدار y در حال افزایش است. این تابع صعودی نام دارد.



x	-2	-1	0	1	2
$y=2^{-x}$ یا $y=(\frac{1}{2})^x$	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

در تابع $y=2^{-x}$ با افزایش مقدار x، مقدار y در حال کاهش است. این تابع نزولی است.



نکته: نمودار تابع نمایی صعودی یا نزولی می‌باشد اصطلاحاً یکنوا هستند پس یک به یک و معکوس پذیر است و معکوس تابع نمایی تابع لگاریتم نام دارد

$$f(x) = a^x \Longrightarrow f(x) = \log_a x$$

(می‌خواهیم لگاریتم x در مبنای a)

چند تا از خواص لگاریتم را مطرح می‌کنیم:

① $\log_a x \cdot y = \log_a x + \log_a y$

② $\log_a x^n = n \log_a x$

③ $\log_{10} x = \log x$

④ $\log_e x = \ln x$

⑤ $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

⑥ $\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$

⑦ $\log_a 1 = 0$

⑧ $\log_a a = 1$

$\log 10 = 1$

مثال: اگر $\ln a = ۲$, $\ln b = ۳$ حاصل $\ln a.b$, $\ln\sqrt{a^{۳}.b^{۲}}$ را بیابید.

$$\ln a.b = \ln a + \ln b = ۲ + ۳ = ۵$$

$$\ln\sqrt{a^{۳}.b^{۲}} = \ln\left(a^{۳}.b^{۲}\right)^{\frac{۱}{۲}} = \frac{۱}{۲}.\ln\left(a^{۳}.b^{۲}\right) =$$

$$= \frac{۱}{۲}\left[\ln a^{۳} + \ln b^{۲}\right] = \frac{۱}{۲}\left[۳\ln a + ۲\ln b\right] =$$

$$= \frac{۱}{۲}\left[۳ \times ۲ + ۲ \times ۳\right] = \frac{۱}{۲} \times ۱۲ = ۶$$

نکته: $\left(e^{\ln x} = x\right)$

$$e^{\ln ۵} = ۵$$

جلسه سوم

پایان جلسه دوم