

جلسہ دوم
ریاضی ۲
محمدپور

- نمودار تابع دو متغیره

نمودار تابع دو متغیره $Z = f(x, y)$ مجموعه نقاطی مانند (x, y, z) از فضای باشد به طوری که $(x, y) \in D_f$. مجموعه این نقاط معمولاً یک سطح (رویه) در فضای پدید می آورند. رسم این نمودارها با توجه به اینکه می خواهیم یک شکل در فضای سه بعدی را در فضای دو بعدی تصور کنیم، اغلب کار دشواری است.

یکی از روش هایی که می توان نمودار یک تابع دو متغیره را رسم و با حداقل تصور کرد این است که، به ازای مقادیر حقیقی c ، سطح $Z = f(x, y)$ را با صفحه $Z = c$ قطع دهیم. حاصل این برافورد یک منحنی می باشد که به آن منحنی تراز می گویند. از متصل کردن منحنی های تراز در فضا، شکل تقریبی سطح بدست می آید.

تذکره: الف) در مباحث بعدی، هرگاه عبارت «نقطه (x_0, y_0) بر روی سطح $Z = f(x, y)$ » را به کار ببریم منظور، «نقطه $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ » می باشد.

در فضای دو بعدی نیز این مرسوم است، هرگاه می گویند تابع f در نقطه x_0 منظور نقطه $(x_0, f(x_0))$ می باشد.

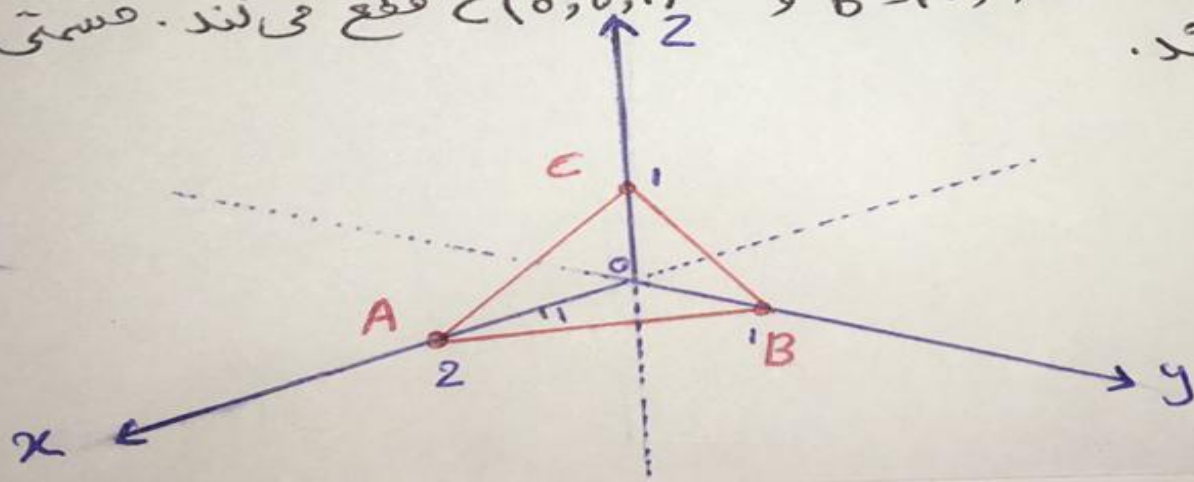
ب) چون فضای تصویر یا مداخل سه بعدی می باشد، لذا برای تابع هایی که بیش از دو متغیر دارند، نمی توان نمودار را رسم کرد.

مثال ۱: نمودار تابع $f(x, y) = 1 - \frac{1}{2}x - y$ را مشخص کنید.

حل: دامنه این تابع تمام نقاط صفحه x, y می باشد. چند سطحی تر از این تابع به صورت زیر می باشد.

$$\begin{aligned}
 Z = -2 &\Rightarrow 1 - \frac{1}{2}x - y = -2 \Rightarrow y = 3 - \frac{1}{2}x \\
 Z = -1 &\Rightarrow 1 - \frac{1}{2}x - y = -1 \Rightarrow y = 2 - \frac{1}{2}x \\
 Z = 0 &\Rightarrow 1 - \frac{1}{2}x - y = 0 \Rightarrow y = 1 - \frac{1}{2}x \\
 Z = 1 &\Rightarrow 1 - \frac{1}{2}x - y = 1 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x \\
 Z = 2 &\Rightarrow 1 - \frac{1}{2}x - y = 2 \Rightarrow y = -1 - \frac{1}{2}x \\
 Z = 3 &\Rightarrow 1 - \frac{1}{2}x - y = 3 \Rightarrow y = -2 - \frac{1}{2}x
 \end{aligned}$$

ملاحظه می شود که معادلات موازی تر از، خط هایی موازی با شیب $m = -\frac{1}{2}$ در صغری های $Z = Z_0$ می باشند، اگر این خط ها را در معادله هم متقل کنیم، یک صغری حاصل می شود. این صغری، محورهای مختصات را در نقاط $A(2, 0, 0)$ و $B(0, 1, 0)$ و $C(0, 0, 1)$ قطع می کند. قسمتی از این شکل به صورت مقابل می باشد.



$$f(x, y) = x^2 + y^2 \text{ را مستخرج کنید.}$$

مثال ۲: نمودار تابع

حل: دانسته این تابع تمام نقاط صفحه xy می باشد. چند سطح تراز این تابع به صورت زیر است.

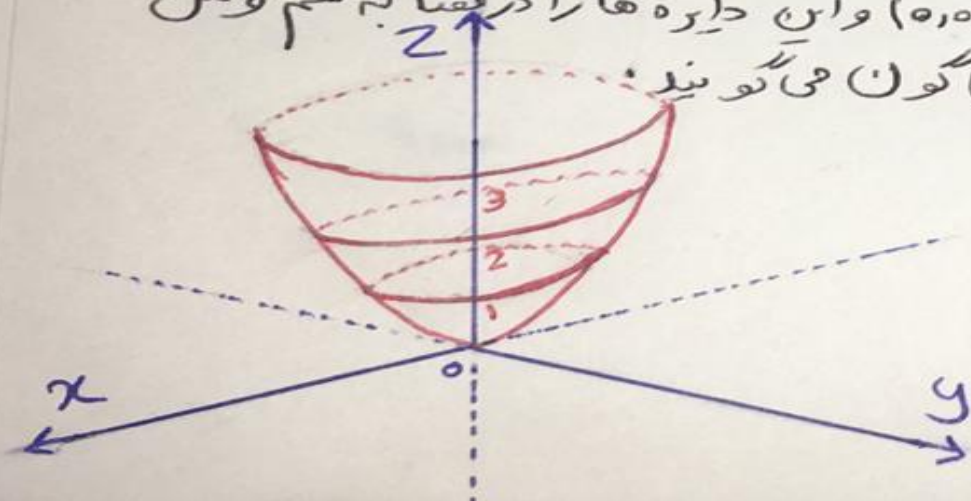
$$Z=0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 0$$

$$Z=1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$$

$$Z=4 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4$$

$$Z=9 \Rightarrow x^2 + y^2 = 9$$

در معادله $x^2 + y^2 = 0$ فقط نقطه $(0, 0)$ صدق می کند. بقیه سطحی های ترازها، دایره هایی به مرکز $(0, 0)$ و شعاع های ۱، ۲ و ۳ می باشند. اگر نقطه $(0, 0)$ و این دایره ها را در فضا به هم وصل کنیم شکلی به صورت مقابل حاصل می شود که به آن سهمی گون می گویند.



- نقشه سطح
تعریف: از تقویر مجسمه ای از معنی های تراز یک سطح بر صفحه x, y ، نموداری حاصل می شود که به آن نقشه سطح می گویند.

معنی های موجود در این نقشه را نیز معمولاً معنی های تراز می نامند.
از روی نقشه سطح می توان اطلاعات زیادی را در مورد سطح بدست آورد.
به عنوان نمونه هر چه در فاصله معنی ها به هم نزدیکتر باشند، سبب سطح تند تر و هر چه در فاصله معنی ها با هم دیگر بیشتر باشد، سبب سطح ملایم تر است.

مثال: معنی های تراز تابع $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ را به ازای مقادیر

$\ln 4$ ، 1 و 0 و $-\ln 4$ بدست آورید. و آنها را در صفحه x, y رسم کنید.

حل:

$$Z = -\ln 4 \Rightarrow \ln(x^2 + y^2) = -\ln 4 \Rightarrow x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$$

دایره ای به مرکز $(0, 0)$ و شعاع $\frac{1}{2}$

$$Z=0 \Rightarrow \ln(x^2+y^2)=0 \Rightarrow x^2+y^2=1$$

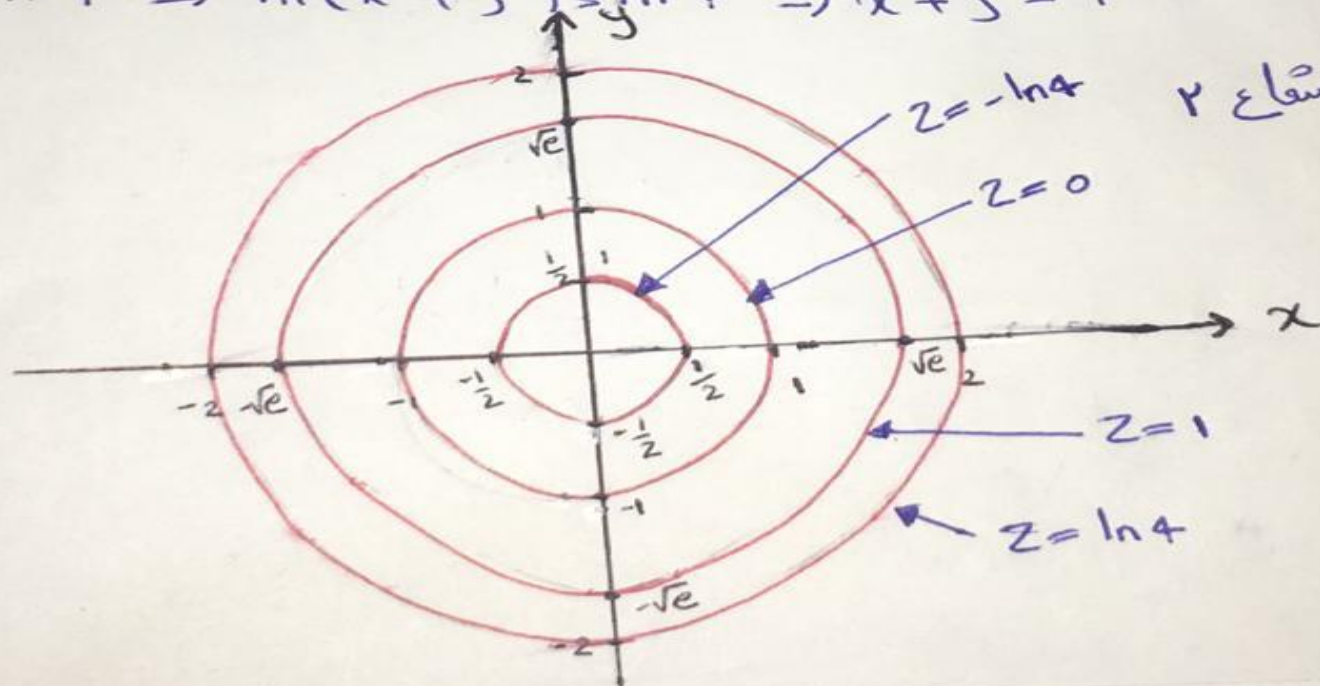
دایره‌ای به مرکز $(0,0)$ و شعاع ۱

$$Z=1 \Rightarrow \ln(x^2+y^2)=1 \Rightarrow x^2+y^2=e$$

دایره‌ای به مرکز $(0,0)$ و شعاع \sqrt{e}

$$Z=\ln 4 \Rightarrow \ln(x^2+y^2)=\ln 4 \Rightarrow x^2+y^2=4$$

دایره‌ای به مرکز $(0,0)$ و شعاع ۲



سطح تراز: برای توابع سه متغیره می توان نموداری رسم کرد ولی به ازای مقادیر مختلف $W=c$ ، معادله $f(x,y,z)=c$ یک سطح در فضا می باشد. این سطح را، سطح تراز تابع سه متغیره f گویند.

مثال: سطح های تراز تابع $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ را به ازای $W=1, 4$ بدست آورید.

حل: کره ای به مرکز (0,0,0) و شعاع 1 $W=1 \Rightarrow x^2+y^2+z^2=1$

کره ای به مرکز (0,0,0) و شعاع 2 $W=4 \Rightarrow x^2+y^2+z^2=4$

تمرین ۱: دامنه توابع زیر را بدست آورده و سپس بر روی صفحه x و y نمایش دهید.

$$\textcircled{1} f(x, y) = \sqrt{y^2 - x}$$

$$\textcircled{2} f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$$

$$\textcircled{3} f(x, y) = \ln\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$\textcircled{4} f(x, y) = \ln(x - y)$$

$$\textcircled{5} f(x, y) = \frac{y + 2x}{\sqrt{2 - x}}$$

$$\textcircled{6} f(x, y) = \frac{y}{x^2 - 1}$$

$$\textcircled{7} f(x, y) = \frac{\sqrt{2 - x}}{\sqrt{y + 2}}$$

$$\textcircled{8} f(x, y) = e^{-(x + y^2)}$$

تمرین ۲: چهار منحنی ترانه توابع زیر را مشخص و تصویر آنها را در صفحه x و y رسم کنید.

$$\textcircled{1} f(x, y) = \frac{x}{y}$$

$$\textcircled{2} f(x, y) = 2x + y - 1$$

$$\textcircled{3} f(x, y) = x^2 - y$$

$$\textcircled{4} f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$$

• پایان جلسه دوم