



جزوه

مکانیک سیالات

دکتر مرتضایی

دانشگاه علوم و تحقیقات

شما میتوانید جواب سوالات خود را، با جستجو تگ های زیر در کانال اسکویی، بیابید:

#آموزشی #جزوه #مکانیک_سیالات

راه های ارتباطی:

📍 telegram.me/scopie_srbiau (@scopie_srbiau)

📷 instagram.com/scopie.srbiau (@scopie.srbiau)

🌐 scopie-srbiau.com

اسکویی منتظر نظرات و انتقادات شما می باشد:

📍 telegram.me/scopieCT (@scopieCT)

مقدمه

- ارتفاع زیاد باشد محیط نابینوسته است. ستاره ها نابینوسته است اما در آن ها مکانیک کوانتوم وجود ندارد.
- ردیف های یک کلاس نابینوسته است اما در صفی که با سرعت بسیار زیاد حرکت کنند امکان دارد به بینوسته تبدیل شود.
- فاصله بین اتم ها (الکترون و پروتون) بسیار کم است پس مکانیک سیالات نیست و مکانیک کوانتوم.
- پس در محیط های کم و زیاد مکانیک کوانتوم داریم.
- حال می خواهیم وجود اجسام و حرکت آن ها را در یک لوله بررسی کنیم و یا دلا در کرن نیرو چه تأثیری دارد بر سیال ما
- مکانیک سیالات در درس رئولوژی ... کاربرد دارد.

$$F = m \cdot a \quad \text{نیرو}$$

$$F \cdot t = m a \cdot t \rightarrow F \cdot t = m \cdot v \quad \text{ضربه / تکانه}$$

ماد و سیستم معاسبات SI و مهندسی (انگلیسی) داریم

کمیت های اصلی	SI	SI	English	English
	mks	cgs		
طول	m	cm	ft	in
جرم	kg	g	lbm	
زمان	s	s	s	s
دما	C°		F°	F°

$$\frac{1}{12} \text{ ft} = \text{in} \quad 1 \text{ m} = 100 \text{ cm} \quad 1 \text{ kg} = 1000 \text{ g} \quad 1 \text{ K} = 1 \text{ C} + 273$$

$$1 \text{ ft} = 12 \text{ in} \quad 1 \text{ R} = 1 \text{ F} + 240 \quad 1,8 \text{ T}(\text{C}) + 32 = \text{T}(\text{F})$$

$$1 \text{ in} = 2,54 \text{ cm} \rightarrow 1 \text{ ft} = ? \rightarrow 30,48$$

کمیت های فیزیکی	mks
-----------------	-----

مساحت	m ²
-------	----------------

حجم	m ³
-----	----------------

سرعت	m/s
------	-----

دانسیته	kg/m ³
---------	-------------------

نیرو	kg m/s ²
------	---------------------

$$g = 10 \rightarrow 1 \text{ kg m/s}^2 = 10 \text{ N}$$

فشار

برای بررسی تغییر شکل ما به سراغ نیروی رویی رویم بلکه از نیرو، فشار را معایبه می‌کنیم.
تبدیل نیرو به کمیت‌ای که سطح افعال نیرو را حجم بد نظر بگیرد.

تشن stress

یعنی کمیت ما اسکالر (نقطه مقدار دارد) و برخی دیگر برداری است و جهت نیز دارد علاوه بر مقدار

دانشیه، جرم، دما → اسکالر

نیرو، سرعت → برداری

$$\left. \begin{aligned} F &= 80 \text{ N} \quad \text{در صفحه} \rightarrow \text{درفضا} \\ F &= 80 \cos 30^\circ \hat{i} + 80 \sin 30^\circ \hat{j} \end{aligned} \right\} F = 5\hat{i} + 7\hat{j} + 3\hat{k}$$

نیروی مقدار دارد و سه جهت حرکتی برداری سه تا کمیت (سه متغیر) اصلی دارد.

نیروی یک متغیر وابسته و سه متغیر اصلی دارد.

مساحت یک کمیت برداری است.

صفحه یک کمیت برداری است (چون که واحد آن m^2 است و ما با یک نیروی دیگر این را نکه داشته ایم

جهت صفحه را با بردار نرمال آن نمایش می‌دهیم.

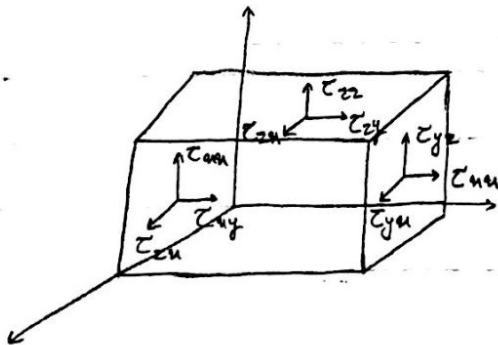
$$\text{صفحه} \quad \vec{S} = 1\hat{i} + 7\hat{j} - 5\hat{k}$$

صفحه
↑
بردار نرمال
(به صفحه وارد می‌شود)

$$S = \sqrt{1^2 + 7^2 + (-5)^2} \quad \text{مقدار صفحه} = \text{مساحت}$$

ما به صفحه سه نوع نیرو می‌توانیم وارد کنیم (عمودی، برشی، موازی)

روی صفحه xy تنش عمودی τ_{xx}
 روی صفحه xy اعمال شود به ما تنش برشی τ_{yx} می‌دهد.
 روی صفحه z اعمال شود، تنش برشی τ_{zx} می‌دهد.



$$\left. \begin{aligned} \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{aligned} \right\} \leftarrow F_x \quad \left. \begin{aligned} \tau_{yx} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{yz} \end{aligned} \right\} \leftarrow F_y$$

$$\tau = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{bmatrix}$$

Normal stress تنش های عمودی، چرا که نیرو عمود بر صفحه است.

shear stress (تنش های برشی) τ_{xz}

$$\tau_{ij} = \frac{F_i}{A_j}$$

$$p_a = \frac{N}{m^2}, \quad p_{si} = \frac{lbf}{in^2}$$

واحد های تنش:

فشار جو (فشار هیدرواستاتیک) لزجش تنش عمودی است.

$$p = 100 \text{ kPa}, \quad p = \frac{f}{A} \rightarrow f = pA$$

مثال: نیروی دلد برف دست را معاسبه کنید بر اثر فشار جو؟

$$A = 10 \text{ cm} \times 20 \text{ cm} = 200 \text{ cm}^2$$

$$A = 200 \text{ cm}^2 \times \left(\frac{1 \text{ m}}{100 \text{ cm}}\right)^2 = 0.02 \text{ m}^2$$

$$p = 100 \text{ kPa} \times \left(\frac{1000 \text{ Pa}}{1 \text{ kPa}}\right) \left(\frac{1 \text{ N/m}^2}{1 \text{ Pa}}\right) = 100,000 \text{ N/m}^2$$

$$f = pA = 100,000 \text{ N/m}^2 \times 0.02 \text{ m}^2 = 2000 \text{ N}$$

تنش (بر حالت کلی):

$$\sigma_{ij} = \tau_{in} + \delta_{in} p$$

$$\delta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \sigma = \begin{bmatrix} \tau_{11} + p & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} + p & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} + p \end{bmatrix}$$

$$\delta_{11} = 1 \quad \delta_{22} = 1 \quad \delta_{33} = 1 \quad \delta_{12} = 0 \quad \delta_{13} = 0 \quad \delta_{21} = 0 \quad \delta_{23} = 0$$

مارونوع فشار مطلق و فشار نسبی در هم.

$$\text{Absolute pressure} = p_{abs} \quad \text{فشار مطلق}$$

$$\text{gage pressure} = p_{gage} \quad \text{فشار نسبی}$$

$$p_{abs} = p_{gage} + p_{atm}$$

خواص سیالیت

لر بعد مکانیکی : سنگین یا سبک بودن (چگالی و دانسیته)
 دانسیته ی شماره نسبت به دانسیته آب را چگالی می گویند.

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (\text{kg/m}^3) \quad \text{دانسیته}$$

$$S = \frac{\rho_{\text{ماده}}}{\rho_{\text{آب}}} \quad \text{چگالی}$$

تفاوت ویسکوزیته، غلظت و چسبندگی:

غلظت را معمولاً در مایعات و محلول ها، به کار می بریم.

هرچه غلظت ↑، ویسکوزیته ↑

در یک ماده مانند اتانول، فقط ویسکوزیته دلرد و غلظت دلرد.

گرانروی Viscosity

مقاومت در برابر حرکت را ویسکوزیته می گویند.
 $1 \text{ cP} = 1 \text{ mPa.s}$ (سنتی پواز)
 $\mu \text{ (Pa.s)}$

(گرش) تغییر شکل $\rightarrow \epsilon = E \cdot \epsilon$ تنش (جامد)
 مصل

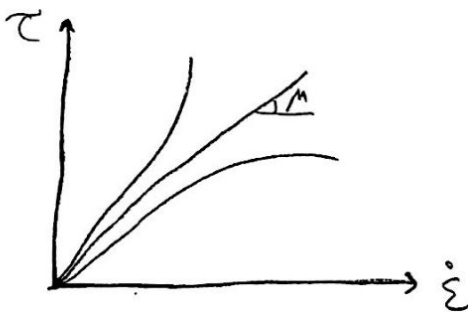
نرخ گرش $\rightarrow \dot{\epsilon} = \mu \cdot \dot{\epsilon}$

$$\dot{\epsilon} = \frac{d\epsilon}{dt}$$

نمودار تنش بر حسب نرخ گرش:

(پلیمر ها اکثرآ کمتر لز سیال نیوتونی هستند)

با افزایش نرخ گرش ویسکوزیته آن ها کمتر می شود.

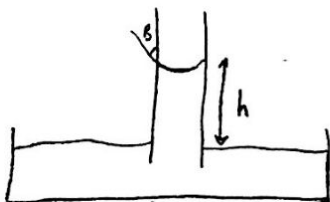


کشش سطحی:

کشش سطحی

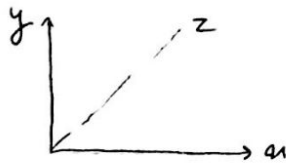
$$h = \frac{2 \sigma \cos \beta}{\rho g D}$$

زاویه تماس $\rightarrow$ σ $\leftarrow$ کشش سطحی
 ρ $\leftarrow$ دانسیته $\leftarrow$ D $\leftarrow$ قطر لوله

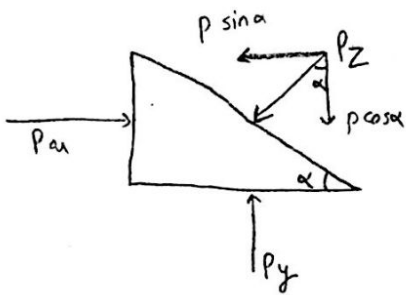


فشار در یک نقطه تابع جهت نیست.

$$\begin{cases} \sum f_x = m a_x \\ \sum f_y = m(a_y + g) \\ \sum f_z = m \cdot a_z \end{cases}$$

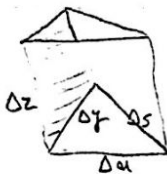


ارتفاع
مساحت قاعده
 $m = \rho V = \rho \frac{\Delta x \Delta y \Delta z}{r}$



$$\begin{cases} P_x \Delta y \Delta z - \frac{P \sin \alpha \Delta S \Delta z}{\Delta x} = m \cdot a_x \\ P_y \Delta x \Delta z - \frac{P \cos \alpha \Delta S \Delta z}{\Delta x} = m \cdot (a_y + g) \end{cases}$$

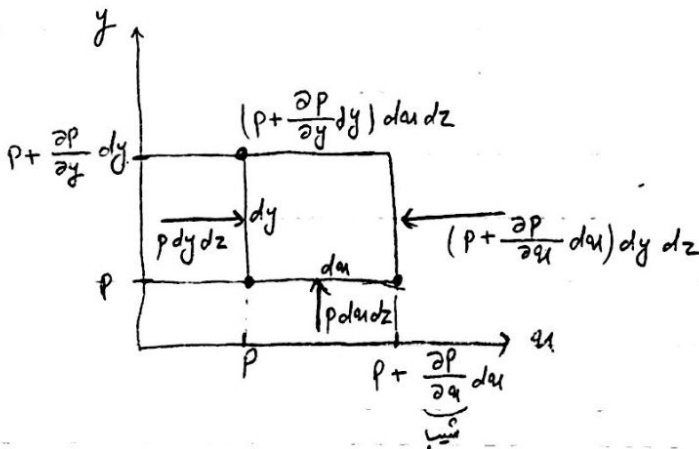
$\frac{\rho \Delta x \Delta y \Delta z}{r}$



$$\begin{cases} P_x - P = \frac{\rho}{r} \Delta x a_x \\ P_y - P = \frac{\rho}{r} \Delta y (a_y + g) \end{cases}$$

اگر $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ به صفر میل کند
 $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$

$$\begin{cases} P_x = P \\ P_y = P \end{cases}$$



$$x: P dy dz - (P + \frac{\partial P}{\partial x} dx) dy dz = \rho dx dy dz a_x$$

$$y: P dx dz - (P + \frac{\partial P}{\partial y} dy) dx dz = \rho dx dy dz (a_y + g)$$

$$\begin{cases} P - P - \frac{\partial P}{\partial x} dx = \rho dx a_x \\ P - P - \frac{\partial P}{\partial y} dy = \rho dy (a_y + g) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -\frac{\partial P}{\partial x} dx = \rho dx a_x \\ -\frac{\partial P}{\partial y} dy = \rho dy (a_y + g) \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x} = -\rho a_x & * \\ \frac{\partial p}{\partial y} = -\rho(\alpha_y + g) & , \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho a_z & * \end{cases}$$

برای حساب کرنش اختلاف فشار بین دو نقطه از رابطه‌ی زیر استفاده می‌کنیم.

$$A(x, y) \quad dA = \frac{\partial A}{\partial x} dx + \frac{\partial A}{\partial y} dy$$

* با استفاده از ستاره ما:

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz$$

$$dp = -\rho a_x dx - \rho(\alpha_y + g) dy - \rho a_z dz$$

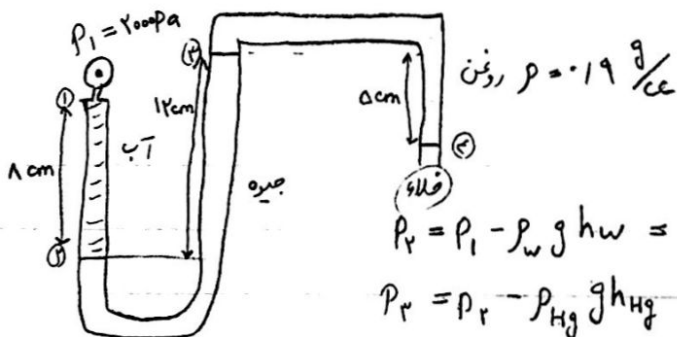
در حالت خاص که $\alpha_x = \alpha_y = \alpha_z = 0$

$$dp = -\rho g dy$$

$$\int_{p_1}^{p_2} dp = - \int_0^h \rho g dy$$

$$p_2 - p_1 = -\rho g h \rightarrow p_2 = p_1 - \rho g h$$

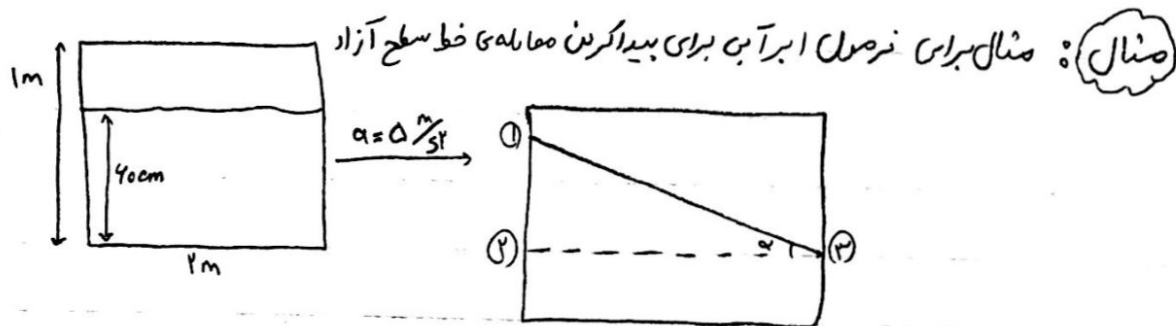
مثال: برای فصل بالا



$$p_2 = p_1 - \rho_w g h_w = 2000 - 1000 \times 10 \times (-0.12) = 2800$$

$$p_3 = p_2 - \rho_{Hg} g h_{Hg} = 2800 - 13600 \times 10 \times (0.12) = -1252$$

$$p_4 = p_3 - \rho_{oil} g h_{oil} = -1252 - 900 \times 10 \times (-0.05) = -1207$$



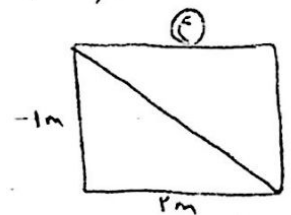
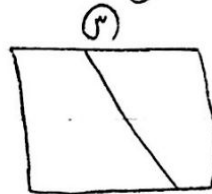
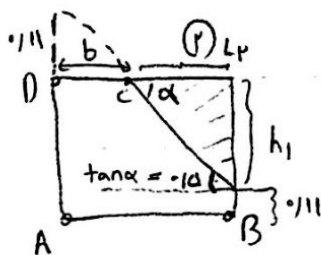
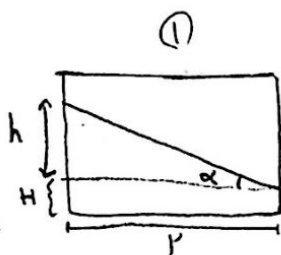
$$\begin{aligned} \textcircled{1}, \textcircled{8} \quad & dp = -\rho(\alpha y + g) dy \\ \textcircled{5}, \textcircled{9} \quad & dp = -\rho \alpha u du \end{aligned}$$

روی سطح آب فشار نسبی صفر است $p_1 = p_2 = 0$

$$\begin{cases} p_2 - p_1 = -\rho(\alpha y + g)(y_2 - y_1) \\ p_2 - p_1 = -\rho \alpha u(u_2 - u_1) \end{cases} \Rightarrow \rho g(y_2 - y_1) = \rho \alpha u(u_2 - u_1)$$

$$\frac{y_2 - y_1}{u_2 - u_1} = \frac{\alpha u}{g} \longrightarrow \tan \alpha = \frac{\alpha u}{\alpha y + g}$$

حال باید بینیم کدام حالت رخ می دهد.



$$\tan \alpha = \frac{\alpha u}{g} = \frac{0}{10} = 0.15$$

$$h = r \times \tan \alpha = 1 \quad \text{و چون } \frac{h}{L} = \tan \alpha$$

$$\begin{aligned} \text{قبل } V &= \text{بعد } V \\ r \times 0.15 &= \frac{r \times 1}{r} \\ 1.2 &\neq 1 \end{aligned}$$

برای این کار حجم ها را کنترل می کنیم

① هم نمی شود چون $h=1$ شد و بعد به افتاده H نزدیک بیشتری شود.

شکل
②

روشن اول

بعد $V = V$ هوامیل

$$r \times 0.15 = h_1 \times Lr$$

$$0.15 = \frac{r h_1^2}{r} \longrightarrow h_1 = \sqrt{0.15}$$

$$\frac{h_1}{Lr} = \tan \alpha = 0.15 \longrightarrow Lr = 2 h_1$$

روش دوم

$$P_A = P_D + P_C + \rho g (1)$$

$$P_A = \rho g (1, 11) = \rho \times 11, 1$$

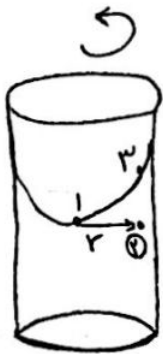
$$P_D = P_C + \rho a_n \Delta u$$

$$P_B = \rho g (0, 111)$$

$$P_A = \rho a_n \Delta u + \rho g (1) = \rho (\Delta) (0, 122) + \rho g (1)$$

$$P_A = \rho (\Delta \times 0, 122 + 10 \times 1) = \rho \times (11, 1)$$

محورن دواره



$$\begin{cases} P_r - P_l = -\rho a_n du \rightarrow r \\ P_r - P_w = -r \rho g dy \rightarrow h \end{cases}$$

$$r \Omega^2 = r = r g h \rightarrow h = \frac{r^2 \Omega^2}{r g} \rightarrow h = \frac{(r_2^2 - r_1^2) \Omega^2}{2 g}$$

فصل سوم سیال در حرکت

توصیف لائرانژی Lagrangian discription

$$dV = \frac{\partial V}{\partial t} dt \quad a(u, y, z, t)$$

مطالعه یک ذره مشخص

در اینجا رستگاه مقدمات تغییر می کند با حرکت

توصیف ادریری Eulerian discription

$$a(u, y, z, t)$$

مطالعه همه ذرات سیال

$$dV = \frac{\partial V}{\partial u} du + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz + \frac{\partial V}{\partial t} dt$$

در اینجا رستگاه مقدمات تغییر نمی کند

مشق گیری بیشتر می شود

تاب acceleration

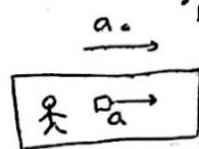
$$a = \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} \left(\frac{dt}{dt} \right) + \frac{\partial V}{\partial u} \left(\frac{du}{dt} \right) + \frac{\partial V}{\partial y} \left(\frac{dy}{dt} \right) + \frac{\partial V}{\partial z} \left(\frac{dz}{dt} \right)$$

پودن شتاب نقطه به سرعت بستگی ندارد به متوالی های دیگر هم بستگی ندارد ممکن است سرعت نداشته باشیم ولی شتاب داشته باشیم.

$$a = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z}$$

local
acceleration
شتاب محلی

convective
acceleration
شتاب انتقالی



$$a + a_0$$

مثال: در $V = 2xy\hat{i} + (4+z^2)\hat{j} - yz\hat{k}$ شتاب را محاسبه کنید در نقطه $(2, -1, 1)$ و $t=10$ ؟

as?

$$a = \frac{dv}{dt} = 4z^2\hat{j} + \overset{2 \times 2 \times (-1)}{\uparrow} u \cdot 2y\hat{i} + \overset{4 \times 1 \times 1}{\uparrow} v (2u\hat{i} - z\hat{k}) + \overset{1 \times 1}{\uparrow} w (1 + z^2\hat{j} - y\hat{k})$$

$$\overset{u}{(2)} \overset{v}{(-1)} \overset{z}{(1)} \text{ , } t=10$$

$$a = 4 \times 1 \hat{j} + (-4) \times 2 \times (-1) \hat{i} + 4 \times (4\hat{i} - 1\hat{k}) + 1(18\hat{j} + 1\hat{k})$$

$$a = 4\hat{j} + 8\hat{i} + 14\hat{i} - 4\hat{k} + 18\hat{j} + 1\hat{k} = 14\hat{i} + 18\hat{j} - 3\hat{k}$$

حل لاس:

$$a = 4z^2\hat{j} + 2xy(2y)\hat{i} + (4+z^2)(2u\hat{i} - z\hat{k}) + (-yz)(1+z^2\hat{j} - y\hat{k})$$

$$a = (4xy^2 + 1 + yz^2)\hat{i} + (4z^2 - 1 + yz^2)\hat{j} + (-4 + z^3 + y^2z)\hat{k}$$

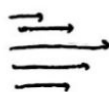
جریان پایدار: steady state flow

$$\frac{\partial v}{\partial t} = 0 \quad \frac{\partial p}{\partial t} = 0 \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \frac{\partial}{\partial t} = 0$$

در جریان پایدار شتاب ندارد.



جریان یکنواخت: uniform



جریان غیر یکنواخت: non uniform

≡

$$\vec{v} = (0, v, 0)$$


$$\vec{v} = (v, 0, 0)$$

جریان یک بعدی :

$$\vec{v} = (v, v, 0)$$

دو بعدی :

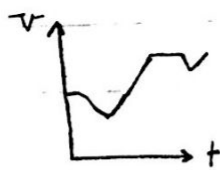
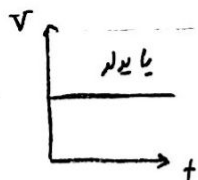
$$\vec{v} = (v, v, w)$$

سه بعدی :

Laminar

جریان آرام :

هرچه ویسکوزیته



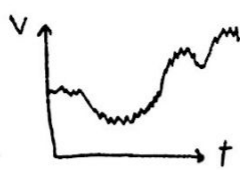
turbulent

جریان متلاطم :

- هرچه سرعت بیشتر $\uparrow$
- هرچه رانندگی بیشتر $\uparrow$
- هرچه قطر بیشتر $\uparrow$

لوله صاف $Re < 2000$ آرام

جریان متلاطم تر می شود لوله ضعیف مانع $Re < 40000$ آرام



ویسکوزیته کمتر باشد تلاطم بیشتر می شود.

Reynold number

* عدد رینولدز

$$Re = \frac{\rho v D}{\mu}$$

یا سه مسیر برای

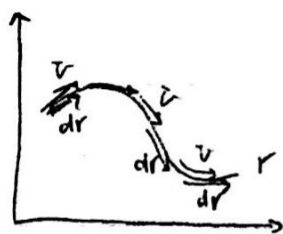
مسیری که یک ذره مشخص طی می کند. path line

مسیری که ذرات گذرنده از یک نقطه ی مشخص طی کرده اند. streak line

مسیر جریان stream line

مسیری که ذرات هم سرعت عبور می کنند.

فرد خارجی منفرد یعنی ۲ برابر هم جهت اند.



$$\vec{v} \cdot d\vec{r} \sin \theta = 0$$

$$\vec{v} \times d\vec{r} = 0$$

$$d\vec{r} = dx \hat{i} + dy \hat{j} + dz \hat{k}$$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ u & v & w \\ dx & dy & dz \end{vmatrix} = 0$$

مسئله: اگر $\vec{v} = \frac{u}{y^2+1} \hat{i} + \frac{v}{y} \hat{j}$ به کمک stream line در نقطه (y, z)

? $t=10$

حل خردم: X

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ y^2+1 & u & 0 \\ 1 & y & 0 \end{vmatrix} = (u \times 0) - (y^2 \times 0) \hat{i} - (0) - (0) \hat{j} + (y^2+1 \times y) - (u) \hat{k} \\ + y \times 3 \times 10 \times y \times 10 - 4 = 1200 - 4 = 1196 \hat{k}$$

حل کلاس:

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ u & v & w \\ dx & dy & dz \end{vmatrix} = 0 \quad (v dz - w dy) \hat{i} + (w dx - u dz) \hat{j} + (u dy - v dx) \hat{k} = 0 \\ (u dz - 0 dy) \hat{i} + (0 dx - y^2+1 dz) \hat{j} + (y^2+1 dy - u dx) \hat{k} = 0 \\ u dz \hat{i} - y^2+1 dz \hat{j} + (y^2+1 dy - u dx) \hat{k} = 0$$

$$u \neq u(z) \quad y = y(z)$$

$$\int y^2 (10) dy = \int u dx + C \rightarrow y^2 \frac{y^2}{2} = \frac{1}{2} u^2 + C \rightarrow y^2 = \frac{1}{y^2} u^2 + \frac{1}{10} C$$

کاربرد های Del operator

$$\text{Del operator} \quad \nabla = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k}$$

①

$$\text{grad} \phi = \nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \hat{k}$$

$$\text{مسئله: گرادیان دما} \quad \nabla T = \frac{\partial T}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial T}{\partial z} \hat{k}$$

div ②

$$A = A_1 \hat{i} + A_2 \hat{j} + A_3 \hat{k}$$

→ یورجانش

$$\text{div } \vec{A} = \nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}$$

اسکالر

$$\text{div } \vec{V} = \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

curl (۳)

$$\text{curl } \vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

$$\text{curl } \vec{V} = \vec{\nabla} \times \vec{V} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix}$$

vorticity vector

$$\vec{\omega} = \text{curl } \vec{V} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \hat{k}$$

مثال: برپایه تریابی را برای $\vec{V} = 2xy \hat{i} + x^2z \hat{j} + yz \hat{k}$ در نقطه (۱، ۱، ۲) و زمان $t=2$ نایه بدست آورید؟

$$\vec{\omega} = (-2 - 1 + 2) \hat{i} + (0 - 0) \hat{j} + (0 - 2x) \hat{k}$$

$$\vec{\omega} = (-1 - 14) \hat{i} + 0 \hat{j} + (-2) \hat{k}$$

$$\vec{\omega} = \underbrace{-17}_{\omega_x} \hat{i} - \underbrace{2}_{\omega_z} \hat{k}$$

$$\vec{\omega} = (-17, 0, -2)$$

جریان ویسکوز $\frac{\partial v}{\partial y} > 0$ ← viscous flow

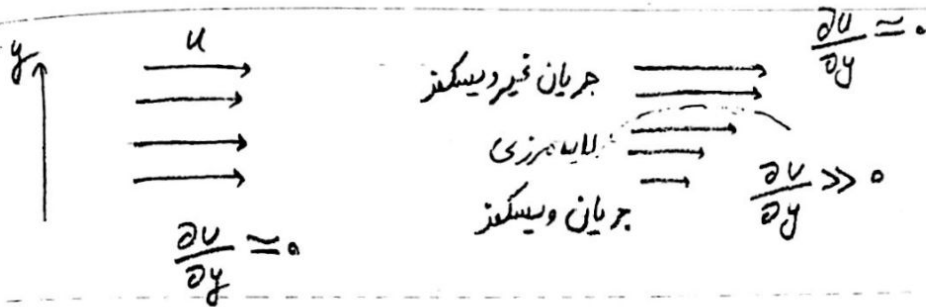
جریان غیر ویسکوز $\frac{\partial u}{\partial y} \approx 0$ ← inviscid flow

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \rightarrow \text{تغییر سرعت } x \text{ ویسکوزیته } = \text{تنش}$$

$$\tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

$$\tau_{xz} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

$$\tau_{xy} = 2\mu \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{\frac{1}{2} \dot{\gamma}_{xy}}$$

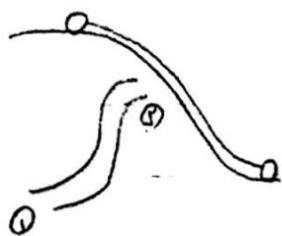


inviside

معادله ی برنولی : (بقای انرژی)

مسئله ی شماره

۱
۵
۶



$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + h_1 = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + h_2$$

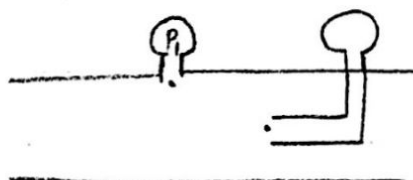
$$0 + \frac{p_1}{\rho g} = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g}$$

۱۱
۵
۱۲

۳۶، ۳۷



$$v_2^2 = \frac{2(p_1 - p_2)}{\rho} \quad \text{و} \quad v_2 = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}}$$



فصل چهارم

معادلات جریان (شکل انتگرالی)

۱- معادله بقای جرم

۲- معادله بقای انرژی (قانون اول ترمودینامیک)

۳- معادله بقای مومنتوم (اندازه حرکت) (تکانه) (قانون دوم نیوتون)

$$\frac{D\alpha}{Dt} = \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \alpha$$

مشتق مادی

① معادله بقای جرم (معادله پیوستگی)

$$\textcircled{1} \quad \frac{D\alpha}{Dt} = \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial \mathbf{y}} + \mathbf{w} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial z} = \underbrace{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})}_{\text{سرعت}} \cdot \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} \right)}_{\nabla} \alpha$$

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \alpha$$

$$\downarrow$$

$$\oint_{\text{sys}} \delta dv$$

نظری استوکس

$$\textcircled{1} \quad \iiint_{CV} \nabla \alpha \, dV = \iint_{CS} n \cdot \alpha \cdot dA$$

انتگرال سطحان
حجم کنترل سطح کنترل

$$m = \rho \mathcal{V} = \int \rho \, d\mathcal{V}$$

$$\frac{Dm}{Dt} = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{D}{Dt} \int_{CV} \rho \, d\mathcal{V} = 0 \quad \textcircled{1} \quad \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \rho \, d\mathcal{V} + \mathbf{v} \cdot \nabla \int_{CV} \rho \, d\mathcal{V} = 0$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \rho \, d\mathcal{V} + \int_{CS} \rho \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_x \, dA = 0 \quad \text{شکل انتگرالی معادله بقای جرم}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \rho \, d\mathcal{V} + \sum \rho_i \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{v}_i \cdot A_i = 0$$

تجمع
برای ورودی مایه‌ها
در اینجا انتگرال تبدیل به $\sum$ می‌شود

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \rho \, d\mathcal{V} + \rho_1 \frac{-v_1}{n_1 \cdot v_1} A_1 + \rho_2 \frac{-v_2}{n_2 \cdot v_2} A_2 + \rho_3 \frac{+v_3}{n_3 \cdot v_3} A_3 = 0$$

فرض در ورودی و یک خروجی :
فرض داخلی



$$\times \quad \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \rho \, d\mathcal{V} = \rho_1 v_1 A_1 + \rho_2 v_2 A_2 - \rho_3 v_3 A_3$$

مجموع خروجی - مجموع ورودی = تجمع

$$\dot{m} = \rho V A \quad \text{و} \quad Q = AV \quad \text{دبی حجمی}$$

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2 = \dot{m}_3 = \dot{m} \quad \text{هوای} \quad Q = \text{خروجی ها}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV$$

فرض ۱: جریان پایدار
خروجی ما = ورودی ها

$$\rho_1 A_1 V_1 + \rho_2 A_2 V_2 = \rho_3 V_3 A_3$$

برای یک ورودی $\dot{m}$ ثابت است. $\frac{kg}{s}$

$$\frac{\dot{m}_1}{\rho_1 V_1 A_1} = \frac{\dot{m}_2}{\rho_2 V_2 A_2} \quad A_1 \text{ --- } A_2$$

فرض ۲: دانسیته ثابت است $\rho_1 = \rho_2$

$$\frac{A_1 V_1}{Q_1} = \frac{A_2 V_2}{Q_2} \quad \left(\frac{m^3}{s} \right)$$

دبی جرمی

مثال: آب به لوله‌ای با قطر ۲۰ cm وارد شده از طرف دیگر به قطر ۴ cm خارج می‌شود. اثر دبی جرمی

$Q = 1 \frac{m^3}{s}$ سرعت ورودی، خروجی را حساب کنید؟

$V_1 = ? \quad Q_2 = ?$

$V_2 = ? \quad \dot{m} = ? \quad Q_1 = 1$

$$1 = \pi \times \frac{0.02^2}{4} \times V_1 \rightarrow V_1 = 3.2$$

$$V_2 = \frac{Q_2}{A_2} = \frac{1}{\pi \times \frac{0.04^2}{4}} = \frac{10000}{4\pi} = \frac{2500}{\pi} = 794$$

$$\dot{m} = \rho AV \rightarrow \dot{m} = 1000 \times 1 = 1000 \frac{kg}{s} \quad \dot{m}_1 = \dot{m}_2$$

بقای انرژی:

$$\frac{D}{Dt} \int \rho e dV = \dot{Q} - \dot{W} \quad \text{انرژی در هر kg}$$

مشتق ماری

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho e dV + \nabla \cdot \int_{cv} \rho e \mathbf{v} dV = \dot{Q} - \dot{W}$$

تئوری استوکس

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho e dV + \int_{cs} \rho e \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} dA = \dot{Q} - \dot{W}$$

تبدیل انتگرال به Σ

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho e dV + \rho_1 e_1 \frac{-V_1}{n_1 \cdot V_1 A_1} + \rho_2 e_2 \frac{+V_2}{n_2 \cdot V_2 A_2} = \dot{Q} - \dot{W}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho e dV - \rho_1 e_1 V_1 A_1 + \rho_2 e_2 V_2 A_2 = \dot{Q} - \dot{W}$$

* جمع = خروجی ها - ورودی ها

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho e dV = \text{جمع}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho e dV = \overbrace{\rho_1 e_1 v_1 A_1 + \dot{Q}}^{\text{دوری ها}} - \overbrace{(\rho_2 e_2 v_2 A_2 + \dot{w})}^{\text{خروجی ها}}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho e dV$$

فرز اول : steady state : جریان پایدار
Flow

$$\dot{Q} - \dot{w} = \underbrace{\rho_2 e_2 v_2 A_2}_{\dot{m}_2} - \underbrace{\rho_1 e_1 v_1 A_1}_{\dot{m}_1} = \dot{m} (e_2 - e_1)$$

تبدیل معادله به شکل سیالات (کمیت های سیالات)

e : مجموع انرژی های دلفل و جنبشی و پتانسیل

$$e = m u + \frac{1}{2} m v^2 + m g z$$

انرژی دلفلی

$$e = u + \frac{1}{2} v^2 + g z$$

$$\dot{w} = \rho_2 v_2 A_2 - \rho_1 v_1 A_1 + \dot{w}_s$$

کار مفیدی (پمپ، توربین)

$$\dot{m} (e_2 - e_1) = \dot{Q} - \dot{w}$$

$$\frac{\rho v}{+} = \rho Q = \rho \hat{v} A$$

سرعت

$$h_L = \frac{u_2 - u_1}{g} + \frac{\dot{Q}}{\dot{m} g}$$

هدا تلفاتی Head loss

$$h_L = u_2 - u_1 + \dot{Q}$$

برای جریان یکنواخت

$$h_L = k \frac{v^2}{2g}$$

فشار افتاد

$$\frac{-\dot{w}_s}{\dot{m} g} = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2 - \frac{v_1^2}{2g} - \frac{p_1}{\rho g} - z_1 + h_L$$

رابطه ی کاربردی بقای انرژی

$$\dot{w}_s = -H_p \dot{m} g = -\eta \dot{w}_p$$

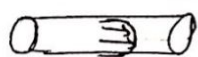
پمپ
رانده مان پمپ
هد پمپ

کار، محیط روی سیستم

$$\dot{w}_s = H_T \dot{m} g = \frac{\dot{w}_T}{\eta_T}$$

توربین
رانده مان توربین

کار، سیستم روی محیط



اگر جریان یکناخت نبود ، جریان آرام بارابولیک

$$\propto \frac{\bar{V}_r^r}{r g} \quad \text{b.} \quad \propto -\frac{\bar{V}_1^r}{r g}$$

که در لوله $\alpha = 2$ در صفحات مولزی $\alpha = 1.5$

$$-\frac{\dot{w}_s}{mg} = \alpha \frac{v_r^r}{v_g} + \frac{p_r}{\rho g} + z_r - \alpha \frac{v_1^r}{v_g} - \frac{p_1}{\rho g} - z_1 + h_L$$

قانون بقای موصوفوم: (تکانه)

* برای حالت Steady state

$$F_t = mV$$

$$F = \frac{m}{t} V \rightarrow f = \dot{m} V = \rho Q V = \rho A V V$$

$$\frac{d}{dt} \int_{CV} d(mV) = \sum F \rightarrow \frac{d}{dt} \int \rho v_n \cdot V dA = \sum F \rightarrow$$

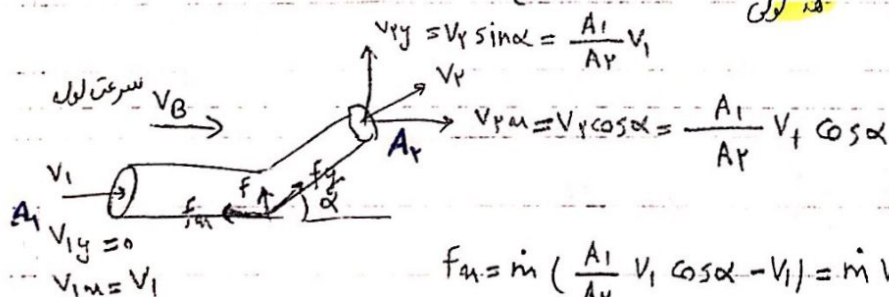
↑
بردار نرمال بر سطح

$$\rho_1 V_1 \underbrace{n_1 \cdot V_1}_{-V_1} A_1 + \rho_2 V_2 \underbrace{n_2 \cdot V_2}_{+V_2} A_2 = \Sigma F \rightarrow \Sigma F = \frac{\dot{m}_2}{\rho_2 V_2 A_2} V_2 - \frac{\dot{m}_1}{\rho_1 V_1 A_1} V_1$$

$$\sum \vec{f} = m(\vec{v}_f - \vec{v}_i) \Rightarrow \begin{cases} \sum f_x = m(v_{fx} - v_{ix}) \\ \sum f_y = m(v_{fy} - v_{iy}) \\ \sum f_z = m(v_{fz} - v_{iz}) \end{cases}$$

* الترسعت كينواخت نبالند! (2)

$\Sigma f = m(\beta_2 v_2 - \beta_1 v_1) \rightarrow \begin{cases} \beta = 1 & \text{جرین یکنواخت یا متلاطم} \\ \beta = 1,33 & \text{جرین پارابولیک در لوله} \\ \beta = 1,2 & \text{جرین پارابولیک بین ۲ صفحه} \end{cases}$



نصونه:

$$F_{A_1} = m \left(\frac{A_1}{A_2} V_1 \cos \alpha - V_1 \right) = m V_1 \left(\frac{A_1}{A_2} \cos \alpha - 1 \right)$$

$$f_y = \dot{m} \left(-\frac{A_1}{A_2} V_1 \sin \alpha - 0 \right) = \dot{m} V_1 \frac{A_1}{A_2} \sin \alpha$$

$$f = \sqrt{f_m^2 + f_0^2}$$

$$A_1 \neq A_2$$

$$V_Y = \frac{A_1}{A_2} V_1$$

۹ ۲۹
۱۰ ۲۵
۲۷

اگر خود لوله هم در حال حرکت باشد با سرعت V_B از سرعت نسبی V_r باید استفاده کنیم.

$$V_r = V_1 - V_B$$

مثال: F را پیدا کنید
 $\alpha = 37^\circ$ $D_1 = 20 \text{ cm}$ $D_2 = 8 \text{ cm}$ $V_1 = 100 \text{ m/s}$
 $V_B = 20 \text{ m/s}$ $\rho_{\text{آب}} = 1000$ $\dot{m} = \rho A V = 1000 (100 - 20) \times \frac{\pi (0.02)^2}{2}$

$$F_x = \dot{m} \left(\frac{A_1}{A_2} V_1 \cos \alpha - V_1 \right) = \dot{m} V_1 \left(\frac{A_1}{A_2} \cos \alpha - 1 \right) = 1000 \pi (0.02) \left(\frac{20}{8} \cos 37^\circ - 1 \right) = 244000 \pi \text{ N}$$

$$F_y = \dot{m} \left(\frac{A_1}{A_2} V_1 \sin \alpha - 0 \right) = \dot{m} V_1 \frac{A_1}{A_2} \sin \alpha = 1000 \pi (0.02) \left(\frac{20}{8} \right) (0.6) = 28000 \pi \text{ N}$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{(244000 \pi)^2 + (28000 \pi)^2}$$

فصل پنجم

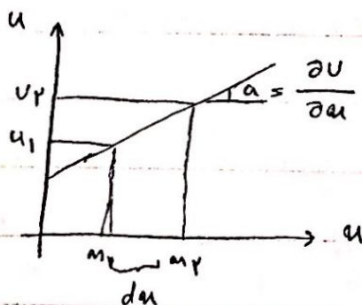
معادلات بقای جرم به شکل دیفرانسیلی

خروجی - ورودی = تجمع

$\rho \left(v + \frac{\partial v}{\partial y} dy \right) du dz$ $dm = \rho dV = \rho du dy dz$
 $V = (u \ v \ w)$
 $\rho u dy dz$ $\rho \left(v + \frac{\partial v}{\partial u} du \right) dy dz$
 $\rho v du dz$

$\rho w du dy$
 $\rho \left(w + \frac{\partial w}{\partial z} dz \right) du dy$

اگر ثابت نباشد باید از کل مشتق بگیریم.



$$y = b + au$$

$$u_2 = u_1 + a(u_2 - u_1) = u_1 + \frac{\partial u}{\partial u} du$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} du dy dz = \rho v dy dz + \rho v du dz + \rho w du dy - \left(\rho v + \frac{\partial(\rho v)}{\partial u} du \right) dy dz$$

$$- \left(\rho v + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dy \right) du dz - \left(\rho w + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} dz \right) du dy =$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} du dy dz = - \frac{\partial(\rho v)}{\partial u} du dy dz - \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dy du dz - \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} dz du dy$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \frac{\partial(\rho v)}{\partial u} - \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} - \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial u} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial u} + \rho \frac{\partial v}{\partial u} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

قانون بقای جرم

for incompressible flow

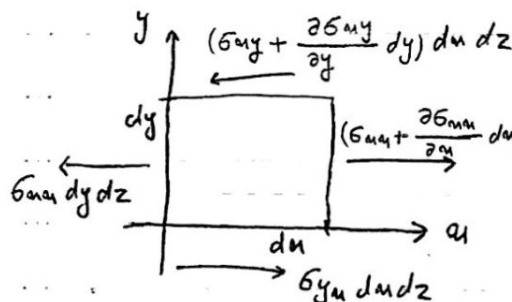
$$\frac{D\rho}{Dt} = 0$$

برای تراکم ناپذیر ثابت $\rho = \text{constant}$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \text{شرط تراکم ناپذیر بودن} \quad \text{مثال:}$$

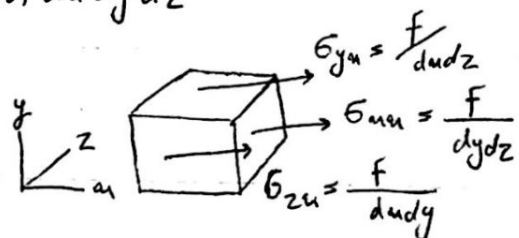
$$\rho_{in} - \rho_{out} - \rho_{gen} = 0$$

قانون بقای مومنتوم:



$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v) du dy dz + \frac{\partial}{\partial t} (\rho w) du dy dz$$

$$G_{xu} = \frac{F_u}{A_u} = \frac{F_u}{dy dz}$$



$$F_{ex} = G_{xu} dy dz + G_{yu} du dz + G_{zu} du dy$$

$$\begin{cases} \sigma_{xy} = \sigma_{yx} \\ \sigma_{xz} = \sigma_{zx} \\ \sigma_{yz} = \sigma_{zy} \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{ما ترسین تنش} \\ \text{مستقارن است} \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v) du dy dz = (\underline{\sigma_{xx}} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx) dy dz + (\underline{\sigma_{xy}} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} dy) du dz +$$

$$(\underline{\sigma_{xz}} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} dz) du dy - \underline{\sigma_{xx}} dy dz - \underline{\sigma_{xy}} du dz - \underline{\sigma_{xz}} du dy$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v) du dy dz = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} du dy dz + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} du dy dz + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} du dy dz$$

$$+ \rho g_x du dy dz + \rho g_x$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}(\rho v) = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + \rho g_x & \text{در جهت } x \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho v) = \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + \rho g_y & \text{در جهت } y \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho w) = \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \rho g_z & \text{در جهت } z \end{cases}$$

$$\rho \frac{DV}{Dt} = \nabla \cdot \sigma + \rho g \quad \text{معادله حرکت در شکل عمومی}$$

برای سیال نیوتونی

$$\sigma_{xx} = -p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial x} \quad \sigma_{yy} = -p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\sigma_{zz} = -p + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \quad \sigma_{xy} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

$$\sigma_{xz} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad \sigma_{yz} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)$$

$$\rho \frac{DV}{Dt} = -\nabla \cdot p + \mu \nabla^2 V + \rho g$$

معادلات حرکت برای سیال نیوتونی یا معادلات نادر استوکس

$$\begin{cases} \rho \frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \rho g_x \\ \rho \frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + \rho g_y \\ \rho \frac{Dw}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + \rho g_z \end{cases}$$

بقای انرژی

انرژی

$$\rho \frac{Dh}{Dt} = k \nabla^2 T + \frac{Dp}{Dt}$$

آر برای سیال تراکم ناپذیر

$$\rho \frac{Dh}{Dt} = k \nabla^2 T \quad \rho c_p \frac{DT}{Dt} = k \nabla^2 T \quad \frac{DT}{Dt} = \alpha \nabla^2 T$$

$$\alpha = \frac{k}{\rho c_p}$$

بم

$$\frac{Dp}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

موضوم

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \rho \mathbf{g}$$

انرژی

$$\frac{DT}{Dt} = \alpha \nabla^2 T$$

$$\rightarrow \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right)$$

$$\rightarrow u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{\partial T}{\partial t}$$

$E_u = \frac{OP}{P_{U^2}}$	P_e	NU
Fr	Sc	
M	Sh	
We	Pr	

فصل ۲ آنالیز ابعادی

واحد کمیت‌های فیزیکی مکانیکی

واحد جله‌های معادلات مکانیکی

اعداد بدون بعد

$$m \frac{V_1^2}{r} + m \frac{P_1}{\rho} + m z_1 g = m \frac{V_2^2}{r} + m \frac{P_2}{\rho} + m z_2 g \quad (J)$$

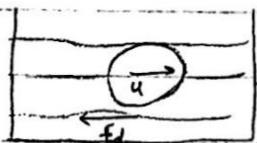
$\frac{kg \cdot m}{s^2} \quad \frac{kg \cdot Pa}{\frac{kg}{m^3}} \quad \frac{kg \cdot m}{s^2}$
 $N \cdot m \quad \frac{N \cdot m^3}{m^3} \quad N \cdot m$

$$\frac{N}{kg} = \frac{kg}{s^2} \quad Pa = \frac{N}{m^2} \quad J = N \cdot m$$

$$\frac{V_1^2}{r g} + \frac{P_1}{\rho g} + z_1 = \frac{V_2^2}{r g} + \frac{P_2}{\rho g} + z_2 \quad (m)$$

$$\frac{V_1^2}{r g z_2} + \frac{P_1}{\rho g z_2} + 1 = \frac{V_2^2}{r g z_2} + \frac{P_2}{\rho g z_2} + \frac{z_1}{z_2}$$

بدون بعد



نیروی درگ Drag Force

F_D نیروی درگ

$$F_D \propto (\mu, u, \rho, R)$$

$\mu^2 = \mu_1, u_1, \rho_1, R_1$ تعداد آزمایش با

μ^2, u_2, ρ_2, R_2

μ^2, u_3, ρ_3, R_3

آزمایش‌ها در سه جای ۱ تا ۳ تا آزمایش انجام داد.

توسط تئوری Buckingham می‌توان تعداد گروه‌ها را فهمید.

$$\frac{F_D}{\rho U R^2} \propto \left(\frac{\mu R}{\mu} \right)$$

$$\frac{N}{\frac{kg}{m^3} \cdot \frac{m}{s} \cdot m^2} = 1 \quad \frac{\frac{kg}{m^3} \cdot \frac{m}{s} \cdot m}{\frac{N}{m^2} \cdot s} = \frac{\frac{kg}{m^3} \cdot \frac{m}{s}}{\frac{kg \cdot m}{s^2} \cdot \frac{s}{m^2}} = 1$$

تئوری Buckingham می‌تواند تعداد گروه‌های بی‌بعد یا مجهول‌های برابر با تعداد کمیت‌ها

تعداد کمیت‌ها

مجموعه‌ای تعداد درجه‌ها

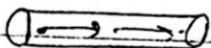
تعداد واحد‌ها $\rightarrow$ $\Pi = n - m$ $\rightarrow$ تعداد گروه‌های بی‌بعد

آزمایش‌ها باید انجام دهیم $\mu = 3 \rightarrow A \propto B \rightarrow \mu = 3$ $\rightarrow$ $3 \leq 2 \rightarrow \mu = 3$ $\rightarrow$ $3 = 3$

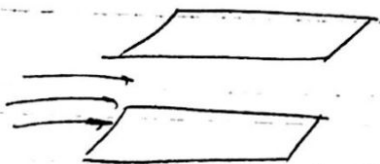
اگر ۳ بود می‌شد $A \propto (B \text{ و } C)$ و $\mu = 3 \rightarrow$ ۹ آزمایش باید انجام دهیم.

Entrance flows

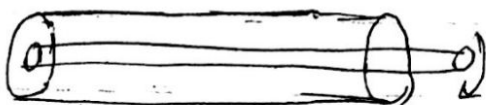
فنل یا جریان های داخلی



جریان داخل لوله

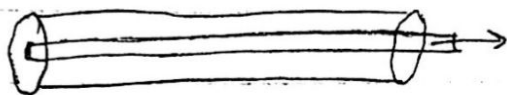


جریان بین دو صفحه موازی

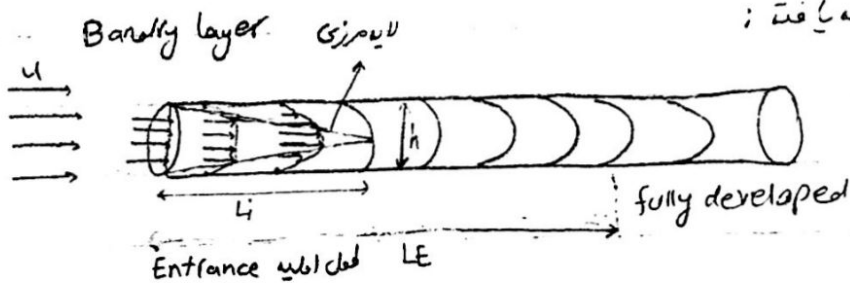


جریان بین دو استوانه چرخان

جریان بین دو استوانه که یکی کشیده شود.



جریان پایدار:



جریان توسعه یافته:

توسعه یافته (پروفیل سرعت با طول لوله تغییر نمی کند)

δ (mm) ضخامت لایه مرزی

فاصله از دیواره

بر قسمت اولیه $y < \delta$ (در لایه مرزی) U متغیر

$y > \delta$ (بیرون لایه مرزی) U یکنواخت

بر قسمت توسعه یافته

سرعت وابسته به r

$$U = U_{max} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

لوله : $\frac{L_E}{D} \approx 0.045 Re$ $L_i = \frac{1}{4} L_E$

بین دو صفحه : $\frac{L_E}{h} \approx 0.04 Re$ $L_i = \frac{1}{4} L_E$

جریان متلاطم : $\frac{L_E}{D} \approx 40 \sim 120$

فرضیات

۱- جریان پایدار $\frac{\partial}{\partial t} = 0$

۲- جریان توسعه یافته $\frac{\partial}{\partial x} = 0$

$V = (u, 0, 0)$

غیر شعاعی $V_r = 0$

غیر چرخشی $\begin{cases} V_\theta = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \theta} = 0 \end{cases}$



بسته آوردن معادله سرعت: $V(r)$

شروع از معادله حرکت: $\rho \frac{dV}{dr} = -\frac{dp}{dr}$

جبهه u

(معادله جزئی) $\rho \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + u \frac{\partial u}{\partial u} + \frac{\partial u}{\partial t} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right)$

جریان غیر شعاعی جریان غیر چرخشی توسعه یافته جریان پایدار توسعه یافته

$+ \frac{\partial^2 u}{\partial u^2} + \rho g$ صاف تقریباً

$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right)$ شرایط مرزی $\begin{cases} r=R & u=0 \\ r=0 & \frac{\partial u}{\partial r} = 0 \end{cases}$

$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \frac{1}{\mu} \left[\frac{\partial p}{\partial x} \right]$

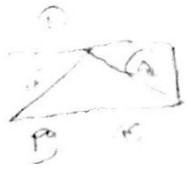
$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \frac{\Delta p}{\mu L} \rightarrow \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right) = \frac{\Delta p}{\mu L}$

$\int d \left(r \frac{du}{dr} \right) = \int \frac{\Delta p}{\mu L} r dr + C \rightarrow r \frac{du}{dr} = \frac{\Delta p}{2\mu L} r^2 + C_1$

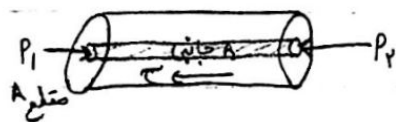
$\left(\frac{du}{dr} = \frac{\Delta p}{2\mu L} r + \frac{C_1}{r} \right) \rightarrow \int du = \int \left(\frac{\Delta p}{2\mu L} r + \frac{C_1}{r} \right) dr + C_2$

$u = \frac{\Delta p}{4\mu L} r^2 + C_1 \ln r + C_2$ $r=0 \quad \frac{du}{dr} = 0$ $\frac{C_1}{0} + \frac{\Delta p}{2\mu L} (0) = 0 \rightarrow C_1 = 0$

$u = \frac{\Delta p}{4\mu L} r^2 + C_2 \rightarrow C_2 = -\frac{\Delta p R^2}{4\mu L}$



$$①, ②, ③ \Rightarrow U = \frac{\Delta P}{4\mu L} r^2 - \frac{\Delta P R^2}{4\mu L} \Rightarrow U = \frac{-\Delta P R^2}{4\mu L} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$



روش اول

المان جعبی (محلزنه نیرو)

$$\sum F = 0$$

$$P_1 A_{\text{مقطع}} - P_2 A_{\text{مقطع}} - \tau A_{\text{جانبی}} = 0$$

$$P_1 \pi r^2 - P_2 \pi r^2 - \mu \frac{du}{dr} (2\pi r L) = 0$$

$$r(P_1 - P_2) = \mu L \frac{du}{dr}$$

$$-\Delta P r = \mu L \frac{du}{dr} \rightarrow \frac{-\Delta P}{\mu L} r dr = du \Rightarrow \int \frac{-\Delta P}{\mu L} r dr = \int du$$

$$U = \frac{-\Delta P}{4\mu L} r^2 + C$$

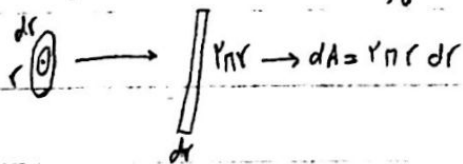
$$\left\{ \begin{array}{l} r=R \quad U=0 \\ 0 = \frac{-\Delta P}{4\mu L} R^2 + C \rightarrow C = \frac{\Delta P}{4\mu L} R^2 \\ U = \frac{-\Delta P R^2}{4\mu L} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \end{array} \right.$$

با استفاده از U می توان :

$$r=0 \quad U = U_{\max} = \frac{-\Delta P R^2}{4\mu L} \quad \text{Umax را بدست آوریم:}$$

سرعت متوسط را بدست آوریم:

$$\bar{U} = \frac{\int U dA}{\int dA} = \frac{\frac{-\Delta P R^2}{4\mu L} \int_0^R \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) 2\pi r dr}{\int_0^R 2\pi r dr} = \frac{-\Delta P R^2}{8\mu L}$$



تغیض برش روی دیواره را بدست آوریم:

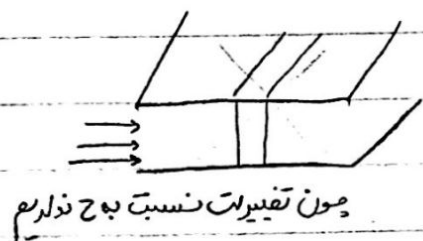
آر به جای r و به جای R و به جای $\frac{du}{dr}$ τ می نویسیم.

$$P_1 \pi R^2 - P_2 \pi R^2 - \tau_s (2\pi R L) = 0 \rightarrow \tau_s = \frac{-\Delta P R}{2L}$$

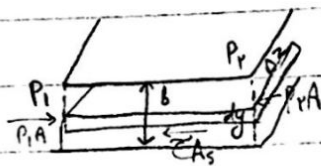
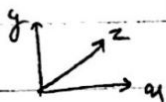
تنش برشی

$$f = \frac{16 \tau_s}{\rho v^2} \rightarrow h_L = f \frac{L}{D} \frac{v^2}{2g}$$

ب. جریان بین دو صفحه موازی :



میان تغییرات نسبت به z نداریم



$$\frac{\partial}{\partial z} = 0 \quad \frac{\partial}{\partial y} = 0 \quad \text{تغییرات نسبت به } y \text{ نداریم}$$

pressure flow

جریان فشاری

Drag flow

جریان درگ

$$y = b$$

$$v = U$$

$$A = \Delta z \, dy$$

$$A_s = \Delta z \, L$$

$$\tau = \mu \frac{dv}{dy}$$

$$\tau|_{y+dy} = \tau|_y + d\tau$$

$$P_1 A - P_2 A - \tau A_s + (\tau + d\tau) A_s = 0$$

$$(P_1 - P_2) \Delta z \, dy - \tau \Delta z \, L + (\tau + d\tau) \Delta z \, L = 0$$

$$-\Delta p \, dy = L \, d\tau \rightarrow \tau = \frac{-\Delta p}{L} y + C_1$$

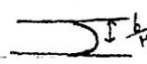
$$\mu \frac{dv}{dy} = -\frac{\Delta p}{L} y + C_1 \rightarrow dv = \frac{-\Delta p}{\mu L} y \, dy + \frac{C_1}{\mu} dy$$

$$\int dv = \int \left(\frac{-\Delta p}{\mu L} y + \frac{C_1}{\mu} \right) dy + C_2 \rightarrow u = \frac{-\Delta p}{2\mu L} y^2 + \frac{C_1}{\mu} y + C_2$$

(pressure flow)

$$y=0 \quad u=0 \quad 0 = \frac{-\Delta P}{\eta m L} (0)^2 + \frac{C_1}{m} (0) + C_2 \rightarrow C_2 = 0$$

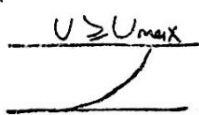
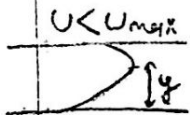
$$y=b \quad u=0 \quad 0 = \frac{-\Delta P}{\eta m L} b^2 + \frac{C_1}{m} b \rightarrow C_1 = \frac{\Delta P b}{m L}$$

$$u = \frac{-\Delta P}{\eta m L} y^2 + \frac{\Delta P b}{L} y = \frac{\Delta P}{\eta m L} (by - y^2) \quad \text{pressure flow برای } u$$


(Drag and pressure flow)

$$\text{B.C.} \begin{cases} y=0 & u=0 \\ y=b & u=U \text{ ثابت} \end{cases}$$

$$\rightarrow u = \frac{-\Delta P}{\eta m L} b^2 + \frac{C_1}{m} b$$



$$u = \frac{\Delta P}{\eta m L} (by - y^2) + \frac{U}{b} y$$

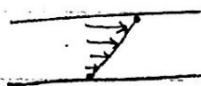
سرعت در چپ را از آن بخش اولیم بدست آوریم و مشتق می گیریم و مساوی صفر

(Drag flow)

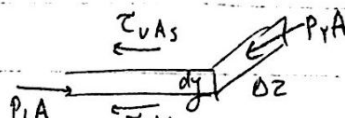
$$\Delta P = 0 \quad u = \frac{C_1}{m} y + C_2$$

$$\begin{cases} y=0 & u=0 \rightarrow C_2 = 0 \\ y=b & u=U \rightarrow U = \frac{C_1}{m} b \rightarrow C_1 = \frac{mU}{b} \end{cases}$$

$$u = \frac{U}{b} y$$



$$u = \frac{\Delta P}{\eta m L} (by - y^2)$$



$$\bar{u} = ? \quad \bar{u} = \frac{\int u dA}{\int dA} = \frac{\int_0^b \frac{\Delta P}{\eta m L} (by - y^2) dz dy}{\int_0^b dz dy} = \frac{\Delta P \Delta z}{\eta m L} \left(\frac{by^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right)$$

$$u_{max} = ?$$

$$\tau_o = ? \quad \frac{\Delta P}{\eta m L b} \left(\frac{b^2}{2} - \frac{b^3}{3} \right) = \frac{\Delta P b^2}{12 \eta m L}$$

$$f = ?$$

$$h_L = ?$$

$$(y = \frac{b}{r})$$

$$u_{max} = \frac{\Delta p}{4\mu L} \left(b \frac{b}{r} - \frac{b^2}{r} \right) = \frac{\Delta p b^2}{4\mu L} \quad u_{max} = \frac{r}{2} \bar{u}$$

$$\tau_w = \tau_d = \tau_o$$

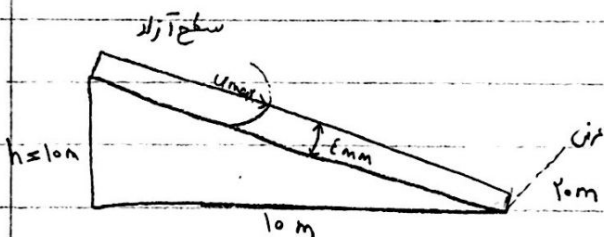
$$p_i A - p_o A - \tau_o A_s - \tau_o A_s = 0$$

$$(p_i - p_o) \Delta z b - 2\tau_o (L \Delta z) = 0 \rightarrow \tau_o = \frac{\Delta p b}{4L}$$

ضریب اصطکاک

$$f = \frac{4\tau_o}{\rho \bar{u}^2} = \frac{4\Delta p b}{\rho L \bar{u}^2}$$

$$h_L = \frac{\Delta p}{\rho g} = \frac{f}{K} \frac{L}{r_b} \frac{\bar{u}^2}{2g} \rightarrow h_L = K \frac{\bar{u}^2}{2g}$$



V.P. حل

$$\rho_{water} = 1 \frac{g}{cm^3}$$

$$\rho_{Air} = 1 \frac{kg}{m^3}$$

$$\mu_{water} = 1 \text{ cp} = 0.001 \text{ Pa}\cdot\text{s}$$

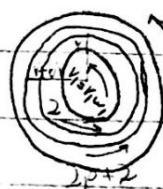
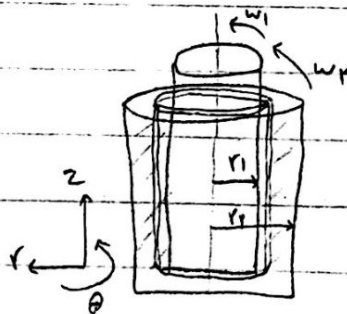
$$Q = \bar{u} \cdot A = ? \rightarrow A = 20 \times 10^{-3} \text{ m}^2 = 0.0004 \text{ m}^2$$

$$\tau_o = ? \quad \bar{u} = \frac{b^2 \Delta p}{4\mu L} = \frac{10^{-3} \times 1000}{4 \times 0.001 \times 10} = \frac{4}{40} = 0.1 \frac{m}{s} \rightarrow Q = \frac{4}{10} \times \frac{1}{100} = 0.004 \frac{m^3}{s}$$

$$Re = ? \quad \tau_o = \frac{b \Delta p}{4L} = \frac{0.001 \times 1000}{4 \times 10} = 0.025 \text{ Pa}$$

$$\Delta p = \rho g h = 1000 \times 9.81 \times 10 = 98100 \text{ Pa}$$

$$\frac{b}{r} = f \rightarrow b = 1 \quad Re = \frac{\rho \bar{u} b}{\mu} = \frac{1000 \times 0.1 \times 1}{0.001} = 100000$$



ج (دو استوانه‌ای چرخان):

$$v_r = r_2 \omega_2$$

$$\mu \propto T$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$$

$$\begin{cases} v_r = 0 \\ v_z = 0 \\ v_\theta = V(r) \end{cases}$$

موازنه کشش

$$\tau A_s r|_r = \tau A_s r|_{r+dr}$$

$$\tau r n r L r = \underbrace{(\tau + d\tau)}_{\text{شعاع}} \underbrace{r n}_{A_s} \underbrace{(r+dr)}_{L} \underbrace{L}_{(r+dr)}$$

$$\tau r = \tau r + r d\tau + r^2 d\tau + r^2 d\tau dr + d\tau (dr)^2$$

$$r d\tau = r^2 d\tau \rightarrow r d\tau = r d\tau \quad (1)$$

$$\tau_{r\theta} = \mu r \frac{d}{dr} \left(\frac{v}{r} \right) \quad (1)$$

از جدول کتاب (تنش در صفحات قطبی):

$$(1), (2) \rightarrow r \mu \frac{d}{dr} \left(\frac{v}{r} \right) = r \mu \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \left(\frac{v}{r} \right) \right) \Rightarrow r \frac{d}{dr} \left(\frac{v}{r} \right) = \frac{d}{dr} \left[r \frac{d}{dr} \left(\frac{v}{r} \right) \right]$$

$$r \frac{d}{dr} \left(\frac{v}{r} \right) + r \frac{v}{r} = C_1 \rightarrow v = \frac{C_1}{r} r + \frac{C_2}{r} \quad (3)$$

$$B.C \begin{cases} r=r_1 & v=r_1 \omega_1 \\ r=r_2 & v=r_2 \omega_2 \end{cases} \quad \begin{cases} r_1 \omega_1 = \frac{C_1}{r_1} r_1 + \frac{C_2}{r_1} \\ r_2 \omega_2 = \frac{C_1}{r_2} r_2 + \frac{C_2}{r_2} \end{cases} \quad \text{(استاد دو معادله دو مجهول)}$$

$$C_1 = r \frac{r_2^2 \omega_2 - r_1^2 \omega_1}{r_2^2 - r_1^2} \quad (4)$$

$$C_2 = \frac{r_1^2 r_2^2 (\omega_1 - \omega_2)}{r_2^2 - r_1^2} \quad (5)$$

$$(4), (5), (3) \Rightarrow v = \frac{1}{r_2^2 - r_1^2} \left[(r_2^2 \omega_2 - r_1^2 \omega_1) r + \frac{r_1^2 r_2^2}{r} (\omega_1 - \omega_2) \right]$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 11 & 12 & 22 \\ \hline V-1, & V-2, & V-3 \end{array}$$

$$V = \frac{\omega_1 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \left(\frac{r_2^2}{r} - r \right)$$

← اگر $\omega_2 = 0$ پس

$$\tau_1 = \mu r \frac{\partial \left(\frac{V}{r} \right)}{\partial r} \bigg|_{r=1} = \frac{\mu r_2^2 \omega_1}{r_2^2 - r_1^2}$$

$$T = f \cdot r = \tau_1 \cdot A \cdot r \rightarrow T = \frac{\mu r_2^2 \omega_1}{r_2^2 - r_1^2} \cdot 2\pi r_1 L \cdot r_1$$

$$T = \frac{2\pi \mu r_2^2 r_1^2 L \omega_1}{r_2^2 - r_1^2}$$

$$\mu = \frac{T (r_2^2 - r_1^2)}{2\pi r_2^2 r_1^2 L \omega}$$

مثال ۷.۳ خوانده شد.

فصل اول

سؤال ۲ -

$$P_{atm} = 100 \text{ kPa} - \frac{\rho g h}{1000 \text{ تبدیل به kPa}} = 100 - \frac{1 \times 10 \times 3000}{1000} = 70 \text{ kPa}$$

$$P_{abs} = 70 - 25 = 45 \text{ kPa}$$

سؤال ۹ -

فشار لائمی (زمانی که سر) $P_1 = 250 \text{ kPa} \rightarrow 250 + 100 = 350 \text{ kPa} = P_{1,abs}$

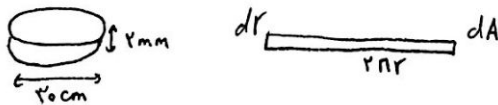
$$T_1 = -10^\circ \text{C} \rightarrow 273 - 10 = 263 \text{ K}$$

$$T_2 = 40^\circ \text{C} \rightarrow 273 + 40 = 313 \text{ K}$$

$$PV = nRT$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{T_2}{T_1} \rightarrow P_2 = 250 \times \frac{313}{263} = 300 - 100 = 200 \text{ kPa} = P_{2,real}$$

سؤال ۱۵ -



$$D = 20 \text{ cm} \rightarrow R = 0.1 \text{ m}$$

$$\omega = 100 \text{ rpm} \times \frac{2\pi}{60} = 10.47 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$h = 0.002 \text{ m}$$

انرژی $\mu = 0.138 \text{ Pa.s}$

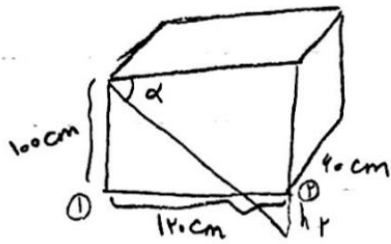
$$T = F \times r \rightarrow T = \int r dF$$

$$dF = \tau \times dA = \frac{\mu r \omega}{h} dA = 0.138 \frac{r \times 10.47}{0.002} \times (\pi r dr) = 31100 \pi r^2 dr \text{ Pa.m}^2$$

$$T = \int 31100 \pi r^2 dr = 31100 \pi \int r^3 dr = 31100 \pi \times \frac{r^4}{4} \Big|_0^{0.1} = 12.1 \text{ N.m}$$

فصل ٢

سؤال ٥ -



$$P_1 = \rho g h_1 = 1000 \times 10 \times 1 = 10000 \text{ Pa}$$

$$P_2 = \rho g h_2 = 1000 \times 10 \times h_r$$

$$P_2 = 10000 \times (-0.12) = -2000$$

$$\tan \alpha = \frac{1 + h_r}{1.12} \rightarrow 1 = \frac{1 + h_r}{1.12} \rightarrow h_r = 0.12$$

$$\tan \alpha = \frac{a_m}{g} = \frac{10}{10} = 1$$

$$A = 1.12 \times 0.12 = 0.1344 \text{ m}^2$$

$$f = \frac{P_1 + P_2}{2} \times A = \frac{10000 - 2000}{2} \times 0.1344 = 2800 \text{ N}$$

$$mg = \rho V g = 1000 \times \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times 0.12 \times 10 = 600 \text{ N}$$

سؤال ١١ -

$$S = 0.175$$

$$S = \frac{\rho}{\rho_w} \Rightarrow S \times \rho_w = \rho \rightarrow \rho = 0.175 \times 1000 = 175 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$\Delta p = 200 \text{ kPa}$$

$$h = ?$$

$$\Delta p = \rho g h \rightarrow h = \frac{\Delta p}{\rho g} = \frac{200000}{175 \times 10} = 11.4$$

$$P_2 = P_1 + \rho g L = 1000 \times 0.12 = 12000 \text{ Pa} \quad (\text{الف})$$

$$P_3 = P_2 + \rho a_{\text{av}} L = 12000 + 1000 \times 4 \times 0.12 = 16800 \text{ Pa}$$

$$P_4 = P_3 - \rho g L = 16800 - 1000 \times 0.12 = 16680 \text{ Pa}$$

$$P_B = P_1 + \rho g L = 0 + 1000 \times 10 \times 0.15 = 15000 \text{ Pa} \quad (\text{ج})$$

$$P_C = P_B + \rho a_{\text{av}} L = 15000 + 1000 \times 4 \times 0.15 = 18000 \text{ Pa}$$

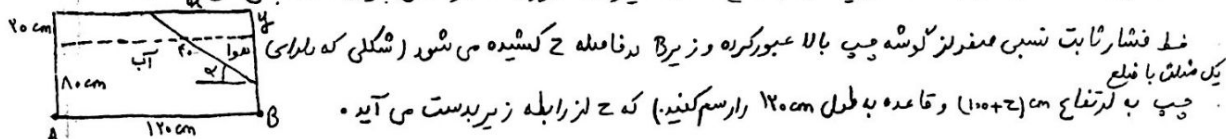
$$P_A = P_C - \rho g L = 18000 - 1000 \times 10 \times 0.15 = 15000 \text{ Pa}$$

روش دوم: مستقیم P_A را حساب کردیم.

$$P_A = P_1 + \rho a_{\text{av}} L = 0 + 1000 \times 4 \times 0.15 = 6000 \text{ Pa}$$

۵- مخزن مثال ۵.۲ را آب پر شده است اما دمای سطح کوچکی در قسمت بالا انتهای چپ با شند. حال نیروی

ولرد بر کف مخزن را بدست آورید. تمام کمیت های دیگرها نظوری که در مثال بیان شد باقی می ماند.



$$\tan \alpha = \frac{10}{120} = \frac{100+z}{120} \rightarrow z = 22.3 \text{ cm}$$

نقطه ی B با لای خط فشار صفر است

$$P_B = -\gamma z = -9810 \times 0.223 = -2190 \text{ Pa}$$

بنابرین فشار در B برابر است با:

$$P_A = 9810 \times 1.0 = 9810 \text{ Pa} \text{ و } P_{\text{avg}} = \frac{P_A + P_B}{2} = \frac{9810 - 2190}{2}$$

$$F = P_{\text{avg}} A = 3810 (0.4 \times 1.2) = 2760 \text{ N}$$

نیروی کف در این صورت عبارت است از:

۲- یک لوله آزمایش در دستگاهی در حال دوران عمود شده است که به تدریج زمانیکه با سرعت به اندازه کافی زیاد

دوران می کند لوله را در موقعیت افقی قرار می دهد. اگر سرعت آن ۱۰۰۰ rpm باشد فشار در کف لوله آزمایش با قطر

نسبتاً کوچک را در صورتیکه لوله معنوی آب بوده و طول آن ۱۲ cm باشد. برآورد نمایید. قسمت فوقانی لوله دمای

شعاع ۴ cm از محور دوران می باشد. سسی کون حاصل از دوران، یک سطح فشار ثابت است. آن که از بالای لوله

آزمایش در حال دوران عبور می کند یک سطح فشار صفر است اگر نقطه ارادی محور دوران و رادی کف لوله آزمایش قرار دهیم

در این صورت رابطه (۲۹.۲) شکل زیر را می گیرد.

$$P = 0 \quad \text{باز} \quad \text{بسته} \quad \text{۴ cm} \quad \text{۱۲ cm} \quad \text{P=?}$$

$$\omega = 1000 \text{ rpm} \rightarrow 1000 \times \frac{2\pi}{60} \text{ rad/s}$$

$$P_2 - P_1 = -\rho a_{\text{av}} dm \quad P = 1000 (1000 \times \frac{2\pi}{60})^2 [(0.12)^2 - 0] = 79 \text{ kPa}$$

۱۵- توزیع دمای $T = 288 - 0.0045z$ K را فرض کرده و جهت یافتن فشار در 10 km در اتمسفر با فرض $p = 101.3\text{ kPa}$ در $z=0$ انحراف بلبیید خط را معاسبه کنید؟

الف $\rho_{\text{air}} = 1.2 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

ب $\rho_{\text{air}} = \text{متغیر}$ و $\frac{p}{RT}$ $T = 288 - 0.0045z \rightarrow p = \frac{p}{R(288 - 0.0045z)}$

الف $p = p_0 - \rho g h = 101000 - 1 \times 10 \times 10000 = 101000 - 100000 = 91000\text{ Pa} = 91\text{ kPa}$
در ارتفاع ۱۰۰۰۰ متری

ب $dp = -\rho g dz \rightarrow dp = -\frac{p g}{R(288 - 0.0045z)} dz \rightarrow \int \frac{dp}{p} = \frac{-g}{R} \int \frac{1}{288 - 0.0045z} dz$

RH: $du = -0.0045 dz$

$\begin{cases} z=0 & u=288 \\ z=10000 & u=223 \end{cases}$

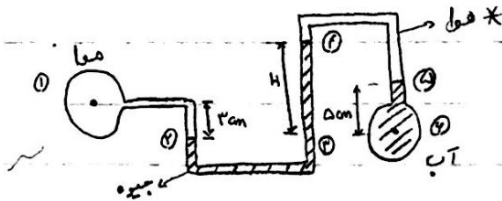
$RH = \frac{-g}{R} \times \frac{-1}{0.0045} \int_{288}^{223} \frac{1}{u} du = \frac{-g}{0.0045R} \times \frac{\ln 288}{223} \rightarrow \frac{p}{p_0} = e^{\frac{-g}{0.0045R} \times \ln \frac{288}{223}}$
 $p = p_0 e^{\frac{-g}{0.0045R} \ln \frac{288}{223}}$

LH: $\int_{p_0}^p \frac{dp}{p} = \frac{g}{R} \ln p - \ln p_0 = \ln \frac{p}{p_0}$
۱۸- اختلاف فشار بین لوله هوا و لوله آب در شکل ۱۴.۲ را معاسبه کنید در صورتیکه H برابر باشد با:

ج ۱۰ cm

ب ۸ cm

الف ۷ cm



* از هوا صرف نظر می کنیم $H = 10\text{ cm} = 0.1\text{ m}$

$\rho = 1000$

$\rho_{\text{هوا}} = 0$

$S_{Hg} = 13.4$

$p_1 - H \times \rho \times g \times S + 0.1 \Delta \times \rho \times g = p_4$

$p_1 - p_4 = \frac{10 \times 0.1 \times 1000 \times 13.4}{13400} - \frac{0.1 \Delta \times 1000 \times 10}{\Delta \cdot 1000} = 13100\text{ Pa} = 13.1\text{ kPa}$

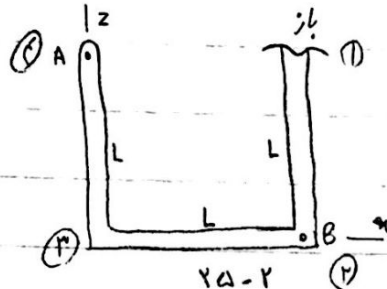
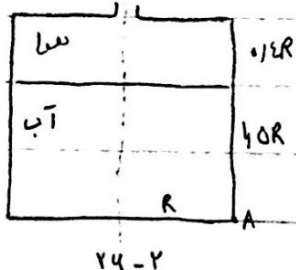
۱۹- فشارها در نقاط A و B در آب بدون لوله U در شکل ۱۵.۲ را معاسبه کنید در صورتیکه:

$L = 50\text{ cm}, a$

ج Ω

ب $L = 40\text{ cm}, a = -10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

الف $L = 30\text{ cm}, a = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

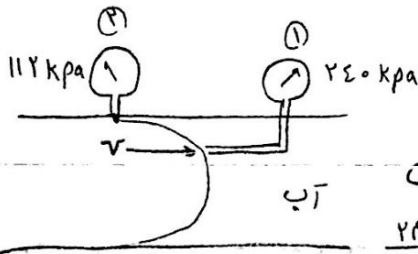


$\rho = 1000$
 $\mu = 10^{-3}$
 $d = 0.008 \text{ m}$
 $Re = \frac{1000 \times 0.1 \times 0.008}{10^{-3}} = 3880$
 $V = \frac{Q}{A} = \frac{2 \times 10^{-2} / 82}{\pi \times 0.004^2} = 0.1685$

با استفاده از ویسکوزیته جنبشی آب حدود $\frac{1}{3} \times 10^{-2}$ عدد رینولدز عبارت است از:
 $Re = \frac{\rho V d}{\mu} = \frac{0.1685 \times 1000 \times 0.008}{10^{-3}} = 3880$

این مقدار لز ۲۰۰۰ بزرگتر است بنابراین اثر لوله صاف نباشد یا مودمی کاملاً گرد شده نباشد جریان آشفته می شود اثر می تواند آرام باشد اثر با دقت لز ارتعاشات ساختاری و نوسانات آب با استفاده از یک لوله صاف جلوگیری می شود.

۵- میل های پیچ و پیچ و پیچ مانند شکل ۱۴.۲ فشارهای کل و استاتیک را می خوانند. سرعت V را معاینه کنید.



معادله ی برنولی به صورت زیر می آید:

$$\frac{V_2^2}{2} + \frac{P_2}{\rho} + gh_2 = \frac{V_1^2}{2} + \frac{P_1}{\rho} + gh_1$$

که نقطه ۲ درست داخل لوله ی پیچ است. با استفاده از اطلاعات

$$240000 = \frac{V_1^2}{2} + \frac{112000}{1000} \quad V_1 = 12 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

واحد های موجود در جمله ی نخست معادله ی بالا را بررسی کنید:

$$\frac{\frac{\text{N}}{\text{kg}} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}{\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}} = \frac{(\frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2})}{\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}} = \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$$

$$\left(\frac{V_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\rho g} + h_1 = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{P_2}{\rho g} + h_2 \right) \quad (\text{عصر اول استار})$$

۲- یک نازل روی یک شیلنگ آب را از قطر ۴ cm به قطر ۱ cm شتاب می دهد. اگر فشار بالادست نازل ۴۰۰ kPa

باشد حدکنر سرعت در خروجی نازل چه قدر است؟

$$A_1 V_1 = A_2 V_2$$

$$\pi \times 2^2 \times V_1 = \pi \times 0.5^2 \times V_2 \quad V_2 = 16 V_1$$

بر اساس معادله ی برنولی می نویسیم:

$$\frac{V_1^2}{2} + \frac{400000}{1000} + gh_1 = \frac{256 V_1^2}{2} + \frac{100000}{1000} + gh_2$$

$$V_1 = 11.53 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad V_2 = 241.5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

این بیانگر مقدار ماکزیمم است زیرا فرض کردیم هیچ نوع تلفاتی به سبب اثرات ویسکوزیته و نیز پرفیل سرعت را

نکینواخت در نظر گرفته ایم.

فصل سوم

۱- یک میدان سرعت در یک جریان منفی به صورت $\vec{v} = 2y\hat{i} + 4\hat{j} \frac{m}{s}$ مانند مثال ۱.۳ داده شده است.

شتاب سرعت را در یکای و برقرار در نقطه‌ی $(2m, 4m)$ در $t=3s$ بیابید.

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + u \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} = 2y\hat{i} + 2y\hat{j} + 4(2\hat{i}) = 2(4+2)\hat{i} + 2y\hat{j}$$

در نقطه‌ی $(2, 4)$ و $t=3s$ شتاب عبارت است از:

$$\vec{a} = 2(4 \times 2 + 2)\hat{i} + 2 \times 2 \times 3\hat{j} = 28\hat{i} + 12\hat{j} \frac{m}{s^2}$$

سرعت زاویه‌ای به صورت زیر است:

$$\Omega = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \hat{i} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \hat{j} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \hat{k} = \frac{1}{r} (1 - 2t) \hat{k}$$

در $t=3s$ داریم:

$$\Omega_z = \frac{1}{r} (1 - 2 \times 3) = -\frac{5}{r} \frac{rad}{s}$$

برابر و در نقطه‌ی دو برابر برابر سرعت زاویه‌ای است بنابراین داریم:

۲- نرخ تغییر چگالی را در یک جریان لایه‌ای که $\rho = 1000(1 - 0.12z)$ و سرعت $\vec{v} = 10(z - z^2)\hat{i}$ است

بیابید. سرعت تنها در راستای z است و چگالی با z تغییر می‌کند (معمولاً راستای عمودی) مشتق مادی چنین

جواب می‌دهد:

$$\frac{D\rho}{Dt} = u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

بنابراین تغییر در چگالی یک ذره مشغول وقتی جریان داخل میدان جریان حرکت می‌کند وجود ندارد.

۳- یک میدان سرعت در مختصات استوانه‌ای به شرح زیر داده شده است:

$$\vec{V}_r = \left(2 - \frac{\Lambda}{r^2}\right) \cos \theta \frac{m}{s} \quad \vec{V}_\theta = -\left(2 + \frac{\Lambda}{r^2}\right) \sin \theta \frac{m}{s} \quad \vec{V}_z = 0$$

شتاب در نقطه‌ی $(2m, 90^\circ)$ چه قدر است؟

$$a_r = V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{V_\theta^2}{r} + \frac{\partial V_r}{\partial t}$$

جدول ۱.۳ مؤلفه‌ی شتاب را می‌دهد.

$$= \left(2 - \frac{\Lambda}{r^2}\right) \cos \theta \left(\frac{14}{r^3}\right) \cos \theta + \left(\frac{2}{r} + \frac{\Lambda}{r^3}\right) \sin \theta \left(2 - \frac{\Lambda}{r^2}\right) \sin \theta - \frac{1}{r} \left(2 + \frac{\Lambda}{r^2}\right)^2 \sin^2 \theta$$

$$= 0 + \left(\frac{2}{r} + \frac{\Lambda}{r^3}\right) \left(2 - \frac{\Lambda}{r^2}\right) - \frac{1}{r} \left(2 + \frac{\Lambda}{r^2}\right)^2 = -1.712 \frac{m}{s^2}$$

$$a_\theta = V_r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{V_r}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} + V_z \frac{\partial V_\theta}{\partial z} + \frac{V_r V_\theta}{r} + \frac{\partial V_\theta}{\partial t}$$

$$= \left(2 - \frac{\Lambda}{r^2}\right) \cos \theta \left(\frac{14}{r^3}\right) \sin \theta + \frac{1}{r} \left(\frac{2}{r} + \frac{\Lambda}{r^2}\right)^2 \sin \theta \cos \theta - \left(\frac{2}{r} - \frac{\Lambda}{r^2}\right) \cos \theta \left(2 + \frac{\Lambda}{r^2}\right) \sin \theta = 0$$

توجه داشته باشید که $\cos 90^\circ = 0$ و $\sin 90^\circ = 1$ است.

۴- جریان آرام لزج آب $20^\circ C$ در یک لوله به قطر $8mm$ مدتهاست. یک مغناطیس $24L$ ، برای گرفتن آب در

$82s$ پس شود آیا جریان آرام است؟

$$n = \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} = \frac{\hat{i} + \hat{j}}{\sqrt{2}}$$

ادامه سؤال ۱۳

$$\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \hat{k} = \hat{i} + \hat{j} \rightarrow |\nabla \phi| = \sqrt{2}$$

۱۱- توزیع سرعت شعاعی در یک جریان داخل کانال به صورت $u(y) = 0.1(1-y^2) \text{ m/s}$ با y اندازه گیری شده به واحد سانتی متر بیان می شود. شتاب یک ذره سیال در خط مرکز که $y=0$ است چه قدر است؟ در جانشیکه

$$u = 0.1(1-y^2) \text{ m/s} \quad a = ? \quad y = 0.5 \text{ cm} \text{ است به چه میزان است؟}$$

$$a = \frac{DV}{Dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + u \frac{\partial V}{\partial x} + v \frac{\partial V}{\partial y} + w \frac{\partial V}{\partial z} = 0$$

۱۳- بردار یکای عمود بر خط جریان در نقطه $(2, -1, 1)$ و $t=2.5$ باشد بیاید آرسیدان سرعت به صورت زیر

$$V = 2xy \hat{i} + y^2 \hat{j} + \hat{k} \text{ m/s} \quad \text{باشد: الف)}$$

$$a = \frac{DV}{Dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + u \frac{\partial V}{\partial x} + v \frac{\partial V}{\partial y} + w \frac{\partial V}{\partial z} = y^2 \hat{j} + 2xy(2y \hat{i}) + y^2 t (2x \hat{i} + 2y \hat{j})$$

$$a = y^2 \hat{j} + 2xy^2 \hat{i} + 2y^2 t x \hat{i} + 2y t y^2 \hat{j} = 1 \hat{j} + 2 \times 2 \times 1 \hat{i} + 2 \times 1 \times 2 \times 2.5 \hat{i} + 2 \times 1 \times 2 \times 1 \times 2.5 \hat{j}$$

$$a = 1 \hat{j} + 4 \hat{i} + 8 \hat{i} - 8 \hat{j} = 12 \hat{i} - 7 \hat{j}$$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ u & v & w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y^2 t dz - 0 \hat{i} - (2xy dz - 0 \hat{j} + (2xy dy - y^2 t dx) \hat{k} \\ 2xy dy \\ dx dy dz \end{vmatrix} \rightarrow 2xy dy = y^2 t dx \rightarrow a dy = y dx \rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{a}$$

$$\ln y = \ln a + \ln c \rightarrow \ln y = \ln ca \rightarrow e^{\ln y} = e^{\ln ca} \rightarrow y = ca \rightarrow -1 = 2c$$

۱۲- سرعت و شتاب یک ذره سیال در نقطه $(2, 1, -2)$ و $t=2.5$ باشد حساب کنید آرسیدان سرعت

$$V = \frac{u}{y} \hat{i} + \frac{v}{y} \hat{j} + yz \hat{k} \text{ m/s} \quad \text{به صورت زیر باشد: الف)}$$

$$a = \frac{DV}{Dt} = (0 + y^2 \hat{j} + 0) + (2xy)(2y \hat{i}) + (y^2 t)(2x \hat{i} + 2y \hat{j} + z \hat{k}) + (yz)(y \hat{k})$$

$$a = y^2 \hat{j} + 2xy^2 \hat{i} + 2xy^2 t \hat{i} + 2y^2 t \hat{j} + zy^2 \hat{k} + y^2 z \hat{k}$$

$$a = 2xy^2(2+t) \hat{i} + y^2(1+2yt) \hat{j} + zy^2(1+t) \hat{k}$$

$$a_x = 2xy^2(2+t)$$

$$a_y = y^2(1+2yt)$$

$$a_k = zy^2(1+t)$$

$$2 \times 2 \times 1(2+2)$$

$$2xy^2 + 2xy^2 t = 4 \times 2 \times 1 + 2 \times 2 \times 1 \times 2.5 = 8 + 8$$

$$a = \frac{DV}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \rightarrow a = uy \hat{j} + (2y^2)(y \hat{j} + t \hat{j}) + (myt)(y \hat{i} + t \hat{j})$$

$$a = 4uy \hat{i} + (uy + 2y^2t + myt^2) \hat{j} \Rightarrow a = 4 \hat{i} - 2 \hat{j} \quad \omega = \nabla \times V = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2y^2 & myt & 0 \end{vmatrix}$$

$$\omega = -\frac{\partial(myt)}{\partial z} \hat{i} - \left(\frac{\partial 2y^2}{\partial z}\right) \hat{j} + \left(\frac{\partial(myt)}{\partial x} - \frac{\partial(2y^2)}{\partial y}\right) \hat{k}$$

معادله خط جریان که از نقطه (۲، -۱) در $t=2s$ می‌گذرد چیست. اگر میدان سرعت به سرعت زیر باشد:

$$V = 2y^2 \hat{i} + \frac{u}{y} \hat{j} + \frac{v}{t} \hat{j} \quad \text{الف) } V = 2y^2 \hat{i} + y \hat{j} + t \hat{j} \quad \text{ب) } V = 2y^2 \hat{i} + y \hat{j} + t \hat{j}$$

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2y^2 & myt & 0 \\ du & dy & dz \end{vmatrix} = 0 \rightarrow (myt dz) \hat{i} - (2y^2 dz) \hat{j} + (2y^2 dy - myt du) \hat{k} = 0$$

$$\begin{cases} \omega_x = \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} & \omega_x = 0 \\ \omega_y = -\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} & \omega_y = 0 \\ \omega_z = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} & \omega_z = 2 \end{cases}$$

$$2y^2 dy - myt du = 0 \rightarrow y dy = u du \rightarrow \int y dy = \int u du + C$$

$$\frac{1}{2} y^2 = \frac{1}{2} u^2 + C \rightarrow C = -\frac{3}{2} \rightarrow y^2 = u^2 - 3 \rightarrow \text{صیر جریان}$$

$$n = \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \rightarrow \nabla \phi = -2u \hat{i} + 2y \hat{j}$$

$$|\nabla \phi| = \sqrt{4u^2 + 4y^2} \rightarrow n = \frac{-2u \hat{i} + 2y \hat{j}}{\sqrt{4u^2 + 4y^2}} \rightarrow n = \frac{-u}{\sqrt{u^2 + y^2}} \hat{i} + \frac{y}{\sqrt{u^2 + y^2}} \hat{j}$$

۱۵- نشان (بردار و اندازه) زروی سیال موجود در نقطه $(-2, 1, 1)$ و $t=2s$ را تعیین کنید اگر میدان سرعت به

$$V = 2y^2 \hat{i} + \frac{u}{y} \hat{j} + \frac{v}{t} \hat{j} + \frac{w}{z} \hat{k} \quad \text{الف) } V = 2y^2 \hat{i} + y \hat{j} + t \hat{j}$$

$$a = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = 2uy (2y \hat{i} + t \hat{j}) + uz (2u \hat{i} + t \hat{k}) + yz (u \hat{j} + y \hat{k})$$

$$= 2x(-2) \times 1 \times 2 \hat{i} + 2(-2) \hat{j} + 2 \times 2 \times 1 \hat{i} + (-2)(1) \hat{k} + 1 \times (-2) \hat{j} + 1 \hat{k}$$

$$= -8 \hat{i} + (-2) \hat{j} + 4 \hat{i} + (-2) \hat{k} + (-2) \hat{j} + 1 \hat{k} = -4 \hat{j} - 2 \hat{k}$$

۱۶- بردارهای سرعت زاردهای مرتبشده را در نقطه $(1, 2, 3)$ وقتی $t=3s$ است برای میدانهای سرعت

زیر باشد: الف) مسئله ۱۳.۳ الف)

$$\Omega = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \hat{i} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \hat{j} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \hat{k}$$

سؤال ٣٢

$$\frac{V_1^2}{2} + \frac{P_1}{\rho} = \frac{V_2^2}{2} + \frac{P_2}{\rho}$$

$$V_1 = \sqrt{\frac{2}{\rho} (P_2 - P_1)} = \sqrt{\frac{2}{\rho} (\rho_B g h - \rho_A g h)} = \sqrt{\frac{2 g h}{\rho_A} (\rho_B - \rho_A)}$$

$$= \sqrt{2 (0.1) (13.4 - 1)} = \sqrt{2 g h \left(\frac{\rho_B}{\rho_A} - 1 \right)} = \sqrt{2 g} = \sqrt{2 \times 13.4} \approx 5.2 \text{ m/s}$$

سؤال ٣٧

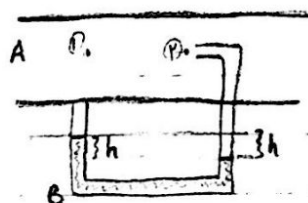
$$\frac{P_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} = \frac{P_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} \quad \frac{P_1}{\rho} = \frac{1}{2} V_2^2$$

$$\frac{V_1^2}{2} + \frac{P_1}{\rho_A g} + h_1 = \frac{V_2^2}{2} + \frac{P_2}{\rho_A g} + h_2 \quad V_1^2 = 2 \frac{(P_2 - P_1)}{\rho} \rightarrow \text{سؤال ٣٤}$$

$$V_1 = \sqrt{\frac{2}{\rho} (P_2 - P_1)} \rightarrow V_1 = \sqrt{\frac{2}{\rho_A} (\rho_B g h - \rho_A g h)} \quad \rho_B = 1000 \quad \rho_A = 1 \text{ (الف)}$$

$$V = \sqrt{2 g h \left(\frac{\rho_B}{\rho_A} - 1 \right)} \rightarrow V_1 = \sqrt{\frac{2}{1} \times (1000 \times 10 \times 0.1 - 1 \times 10 \times 0.1)} \rightarrow V_1 = \sqrt{2000} \text{ m/s}$$

$$V = \sqrt{2 g h \left(\frac{\rho_B}{\rho_A} - 1 \right)} = \sqrt{2 (13.4 - 1)} = \sqrt{20.8} \approx 4.57 \text{ m/s} \quad \rho_B = 13400 \quad \rho_A = 1000 \text{ (ب)}$$



$$P_2 - P_1 = \rho_B g h - \rho_A g h$$

فصل ۴

۴- دریاچه ای جهت کنترل جریان قرار داده شده است که دارای ۲۵ cm عمق و ۲۵۰ cm عرض می باشد. سرعت متوسط جریان ۲/۲ m/s می باشد. اگر دریاچه بتواند طوری ساخته شود که جریان آزاد روی توربین ۱۰ cm باشد حداکثر توان خروجی را با ۸۸ درصد راندمان توربین برآورد بنویسید؟
در جریان آب عبوری از دیون توربین برابر است با

$$Q = A_1 V_1 = 0.25 \times 3.14 \times 2.2 = 1.7425$$

معادله انرژی بین سطح صفرین پشت دریاچه که $p_1 = 0$ ، $V_1 = 0$ ، $Z_1 = 10$ و خروجی توربین که $p_2 = 0$ ، $Z_2 = 0$ به کار می رود

$$\frac{W_s}{mg} = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{P_2}{\rho g} + Z_2 - \frac{P_1}{\rho g} - \frac{V_1^2}{2g} - Z_1 + h_t$$

$$W_s = mg Z_1 = (1000 \times 1.7425) \times 9.81 \times 10 = 189000 \text{ W}$$

توان فای توربین با استفاده از راندمان لحاظ شده اند. حداکثر خروجی توربین عبارت است:

$$W_T = \eta_T W_s = 0.88 \times 189 = 164 \text{ kW}$$

مثال ۱۰۴

آب در یک لوله به قطر ۴ cm با دبی ۰/۰۲ m³/s جریان می یابد. قطر لوله تا ۲۱.۸ cm تقلیل می یابد حداکثر سرعت در لوله را محاسبه کنید. همچنین دین جری را محاسبه کنید. بیرونی های سرعت را یکنواخت فرض کنید؟

حل: حداکثر سرعت در لوله جایی خواهد بود که قطر لوله ای کمترین مقدار باشد در مقطعی با ۲۱.۸ cm قطر داریم

$$Q = AV \Rightarrow 0.02 = \pi \times 0.014^2 V_2 \rightarrow V_2 = 321.5 \text{ m/s}$$

دین جری برابر است با

$$\dot{m} = \rho Q = 1000 \times 0.02 = 20 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

مثال ۲-۴

آب به دیون حصی که دارای یک اسفنج می باشد با دبی ۰/۰۲ m³/s جریان می یابد و از طریق دولاوله از حجم کنترل خارج می شود یکی به قطر ۲ cm و دیگری با دبی جری ۰/۰۱۵ m³/s به سرعت یکسان خروجی از دولاوله به قطر ۲ cm برابر ۱۵ m/s باشد. شست تغییر در جرم داخل حجم را بدست آورید؟ حل: معادله پیوستگی (۱۲-۴) استفاده می شود که به شکل زیر نوشته می شود

$$\frac{dm_{\text{cv}}}{dt} + \dot{m}_2 + \rho A_2 V_2 - \rho Q_1 = \dot{m}_{\text{in}} A$$

که $\dot{m}_{\text{cv}} = \int \rho dV$ و خروجی و یک ورودی با سه عبارت دیگر محاسبه می شوند با بیان عبارت مشتق به صورت $\dot{m}_{\text{cv}} = \rho A_1 V_1 - \dot{m}_2 - \rho A_2 V_2$

معادله پیوستگی خواهد شد $0.02 = 0.015 + 0.01 \times 15 + \dot{m}_{\text{cv}}$

اسفنج آب را با شست ۰/۰۲۹ kg/s جذب می کند $0.01 \times 15 = 0.15 \text{ kg/s}$

مثال ۳.۴

آب از یک مخزن ذخیره با ارتفاع ۴۰ m از طریق یک لوله با قطر ۵ cm که دارای یک نازل در انتهای آن می باشد مطابق شکل ۳.۴ به بیرون جریان می یابد. ضریب افت در سراسر لوله به صورت $K = 1.2$ داده شده است. دبی جریان آب از لوله را برآورد نمایید. همچنین فشار دقیقاً کمی در بالای دست نازل را پیش بین نمایید. (افت ها از زمین نازل می توانند صرف نظر شوند) نازل در ارتفاع ۱۰ m قرار دارد.

حل: معادله انرژی به شکل زیر نوشته می شود

$$\frac{z_2}{\gamma} = \frac{v_2^2}{2g} + z_2 + \frac{P_2}{\gamma} - \frac{v_1^2}{2g} - z_1 - \frac{P_1}{\gamma} + K \frac{v_1^2}{2g}$$

که فشار در سطح ۱ و خروجی ۲ برابر فشار است. سرعت در سطح مخزن باشد و هیچ کار تلفاتی وجود ندارد. هیچ پمپ یا توربینی وجود ندارد. ضریب افت بر مبنای سرعت مشخصه V در لوله خواهد بود و نه بر مبنای سرعت خروجی v_2 معادله پیوستگی را جهت مرتبط ساختن سرعت ها استفاده کنید

$$V = \frac{A_2}{A_1} v_2 = \frac{d_2^2}{d_1^2} v_2 = \frac{4}{25} v_2$$

$$0 = \frac{v_2^2}{2g} + 10 - 40 + 1.2 \left(\frac{4}{25} \right)^2 \frac{v_2^2}{2g} \quad v_2 = 19.15 \text{ m/s}$$

فشار در دست قبل از نازل با به کارگیری معادله انرژی از میان نازل با فرض عدم وجود افت ها بدست می آید. (معادله برنولی نیز می تواند استفاده شود) که شکل زیر را می گیرد.

$$-\frac{z_2}{\gamma} = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{P_2}{\gamma} + z_2 - \frac{v_1^2}{2g} - \frac{P_1}{\gamma} - z_1$$

که سطح ۲ در خروجی قرار داشته و $P_2 = 0$ و $v_1 = 0$ با دست نازل می باشند معادله انرژی نتیجه می دهد

$$0 = \frac{19.15^2}{2 \times 9.81} + \frac{P_1}{\gamma} + z_2 - \left(\frac{4}{25} \right)^2 \frac{19.15^2}{2 \times 9.81} - \frac{P_1}{\gamma} - z_1$$

$$P = 185350 \text{ Pa} \approx 185.35 \text{ kPa}$$

مثال ۳.۴ ؟؟؟

یک زوج با تجربه در زمینه انرژی تصمیم گرفتند که نیروی جاری بعد از کلیه خودشان را مسدود کنند و برآورد کنند که ارتفاع ۴ m می تواند در قسمت بالایی خروجی به طرف توربین ایجاد شود. برآورد شده است که قطر لوله ای دبی ۱۸ m^۳/s می باشد حداکثر قدرت خروجی توربین با فرض عدم وجود افت ها و سرعت مرز خروجی توربین ۳.۶۶ است؟ حل: معادله انرژی به صورت زیر به کار می رود

$$-\frac{z_2}{\gamma} = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{P_2}{\gamma} + z_2 - \frac{v_1^2}{2g} - \frac{P_1}{\gamma} - z_1 + h_L$$

فصل ۴ مثال های حل شده

۱- بالون با آب پر می شود تا لحظه ای که قطر آن ۵۰ cm شود آنگاه آب به دیون باقی مانده با سرعت ۲۰۰ gal/min باشد نرخ افزایش در قطر چقدر است؟

نرخ افزایش در حجم باقی مانده عبارت است از:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{4}{3} \pi R^3 \right) = 4 \pi R^2 \frac{dR}{dt} = \frac{4}{3} \pi D^2 \frac{dD}{dt}$$

gal/min را به $\frac{m^3}{s}$ تبدیل کنید:

$$200 \frac{\text{gal}}{\text{min}} \times 0.003785 \frac{\text{m}^3}{\text{gal}} \times \frac{1}{60} \frac{\text{min}}{\text{sec}} = 0.01242 \frac{\text{m}^3}{s}$$

در حالت فک در صورت وجود بقای جرم بایستی مساوی باشند در این حالت بقای حجم وجود ندارد زیرا آب

غیر قابل تراکم است | این نتیجه می دهد: $\frac{dD}{dt} = 0.003785 \frac{\text{m}^3}{s} \times \frac{3}{4 \pi D^2} = 0.003785 \times \frac{3}{4 \pi (0.5)^2} = 0.003785 \times \frac{3}{4 \pi (0.25)} = 0.003785 \times \frac{3}{\pi} = 0.003785 \times 0.9549 = 0.00361 \frac{\text{m}}{s}$

۲- هوای ۴۰°C و ۲۵۰ kPa در لوله ای به قطر ۳۲ سانتی متر با سرعت ۱۵٪ در حال جریان است. قطر لوله تا ۵۰ cm و دمای هوا تا ۳۱۵ K تغییر می کند. سرعت در لوله با قطر کوچک تر را بدست آورید.

$$P_1 A_1 V_1 = P_2 A_2 V_2 \quad \frac{P_1}{R T_1} \pi \frac{d_1^2}{4} V_1 = \frac{P_2}{R T_2} \pi \frac{d_2^2}{4} V_2 \quad V_2 = \frac{d_1^2 P_1}{d_2^2 P_2 T_1} V_1$$

اطلاعات داده شده را در معادله قرار دهید تا:

$$V_2 = \frac{d_1^2 P_1}{d_2^2 P_2 T_1} V_1 = \frac{(0.32)^2 \times 250}{(0.5)^2 \times 315 \times 0.15} \times 15 = 28.15 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

توجه فشار در صورت مسئله فشار نسبی غرض می شود لذا ۱۰۰ kPa اضافه می شود تا تبدیل به فشار مطلق شود. فشار به صورت kPa استفاده می شود زیرا ثابت گاز برای واحد $\frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$ است.

۳- مایعی به سرعت جریان یکنواخت در مجرای مستطیلی $2 \text{ cm} \times 2 \text{ cm}$ جریان می یابد. مجرا با لوله ای به قطر ۲ cm با پیوستن مسمی تخلیه می شود. در صورتیکه حداکثر سرعت در لوله ۴٪ باشد سرعت در مجرای مستطیلی چقدر است؟

معادله ی سهموی برای $u(r)$ بایستی سرعت را در $r=0$ برابر 4 و در $r=0.01 \text{ m}$ برابر 0 نتیجه می دهد

$$u(r) = 40000 (0.01^2 - r^2)$$

پروفیل سرعتی که این را نتیجه می دهد عبارت است از:

معادله پیوستگی جریان غیر قابل تراکم (مابعد) شکل زیر را می گیرد

$$A_1 V_1 = \int_{A_2} u(r) 2 \pi r dr = \int_0^{0.01} 40000 (0.01^2 - r^2) 2 \pi r dr$$

که $2 \pi r dr$ در انتگرال مساحت دیفرانسیل است که سیال از میان آن جریان می یابد معادله فوق نتیجه می دهد

$$V_1 = \frac{40000 \times 2 \pi}{0.02 \times 0.04} \left(0.01^2 \times \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) = 0.1785 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

- ۴- توربین برای جذب انرژی از منبع آب در حال جریان از دیون لوله‌ای به قطر ۱۰ cm در فشار ۸۰۰ kPa با سرعت متوسط ۱۰٪ طراحی شده است. اگر توربین دارای راندمان ۹۰ درصد باشد چه میزان انرژی می‌تواند تولید شود در صورتیکه آب از طریق لوله‌ای به قطر ۲۰ cm به اتمسفر خارج شود؟

دین جریان و سرعت در خروجی عبارت است از:

$$A_1 V_1 = A_2 V_2 \quad \left\{ \begin{array}{l} V_2 = V_1 \frac{d_1^2}{d_2^2} = 10 \times \frac{10^2}{20^2} = 2.5 \text{ m/s} \end{array} \right. \quad ???$$

$$Q = A_1 V_1 = \pi \times 0.05^2 \times 10 = 0.08 \text{ m}^3/\text{s}$$

فشار در خروجی اتمسفر یک فرض شده یعنی $P_2 = P_1$ معادله انرژی بین ورودی و خروجی توربین به کار برده می‌شود.

$$\frac{V_2^2}{2g} + \frac{P_2}{\gamma} + z_2 = \frac{V_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\gamma} + z_1 + h_L$$

- که از افت ارتفاع چشم پوشی شده و به عنوان راندمان توربین لحاظ شده است با جایگذاری اطلاعات مناسب نتیجه می‌دهد.

$$\frac{V_2^2}{2g} = \frac{V_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\gamma} - \frac{P_2}{\gamma} - \frac{V_1^2}{2g} - z_1 + h_L$$

که توان جذب شده از آب است توان تولید شده به دلیل افت‌های دین توربین از این مقدار کمتر خواهد بود.

- با استفاده از راندمان معادله می‌شود یعنی
- $$\dot{W}_2 = \eta \dot{W}_1 = 0.9 \times 72.3 = 65.1 \text{ kW}$$
- و ادها را در روابط فوق کنترل کنید تا مطمئن شوید آن‌ها سازگار هستند.

- ۵- دین جریان درون یک لوله با استفاده از ونتوری متر نشان داده شده در شکل ۱۲.۴ تعیین می‌شود با استفاده از اطلاعات داده شده در شکل، دین جریان را با فرض جریان یکنواخت و عدم وجود افت‌ها محاسبه کنید (این فرضیات برای جریان‌های بسیار آشفته معقول می‌باشند)

مانومتر فشارها را از خط مرکزی لوله اندازه‌گیری شده‌اند را به صورت زیر مرتبط می‌کند.

$$P_1 + \gamma h_1 = P_2 + \gamma h_2 + \gamma z$$

$$P_1 - P_2 = 49.66 \text{ Pa}$$

که z از بالای جیوه تا خط مرکزی سنجیده می‌شود. معادله‌ی پیوستگی V_1 و V_2 را مرتبط می‌کند.

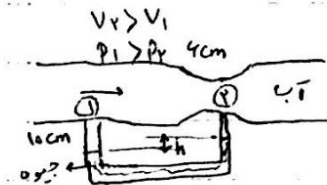
$$V_2 = V_1 \frac{d_1^2}{d_2^2} = \frac{10^2}{4^2} V_1 = 6.25 V_1$$

در این صورت معادله انرژی استفاده می‌شود تا:

$$\frac{V_2^2}{2g} + \frac{P_2}{\gamma} + z_2 = \frac{V_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\gamma} + z_1 + h_L$$

$$Q = A_1 V_1 = \pi \times 0.05^2 \times 1.213 = 0.00953 \text{ m}^3/\text{s}$$

دین جریان عبارت است از



مسألة

مسألة

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + z_1 = \frac{p_r}{\rho} + \frac{v_r^2}{2} + z_r$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \quad \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_r}{\rho g} + \frac{v_r^2}{2g} + z_r$$

$$\frac{p_1 - p_r}{\rho} = \frac{v_r^2 - v_1^2}{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{3} \quad v_1 A_1 = v_r A_r \rightarrow v_r = \left(\frac{D_1}{D_r} \right)^2 (v_1) = \left(\frac{10}{4} \right)^2 v_1 \Rightarrow v_r = 6.25 v_1$$

$$\frac{v_1^2}{2} (6.25^2 - 1) = \frac{p_1 - p_r}{\rho} \rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{1}{6.25^2 - 1} \frac{p_1 - p_r}{\rho}}$$

$$Q_1 = \frac{\dot{m}_1}{\rho} = \frac{10}{1000} = 0.01 \left(\frac{\text{m}^3}{\text{s}} \right) \quad V_1 = \frac{Q_1}{A_1} = \frac{0.01}{\frac{\pi (0.02)^2}{4}} = \frac{100}{\pi} = 31.8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

خروجی - ورودی = جمع

$$0 = \dot{m}_1 - (\dot{m}_2 + \dot{m}_3) \rightarrow \dot{m}_3 = \dot{m}_1 - \dot{m}_2 = 10 - 10 = 10 \left(\frac{\text{kg}}{\text{s}} \right)$$

$$Q_3 = \frac{\dot{m}_3}{\rho} = \frac{10}{1000} = 0.010 \left(\frac{\text{m}^3}{\text{s}} \right)$$

$$V_3 = \frac{Q_3}{A_3} = \frac{0.010}{\frac{\pi (0.02)^2}{4}}$$

فصل ۴ سوال ۶۷ و ۶۹ حذف است درس داده نشده

این فقط ارتفاع آب بالای توربین است که توان توربین را فراهم می کند. سرعت خروجی از توربین تقریبی می شود

با استفاده از $\dot{m} = \rho Q = 1000 \times 0.18 = 180 \frac{kg}{s}$ نتیجه می شود

$\dot{W}_T = \dot{m} g z_1 - \dot{m} \frac{V_1^2}{2} = 1800 \times 9.81 \times 4 - 1800 \times \frac{2.4^2}{2} = 7220 \frac{J}{s}$ یا $7.22 kW$

اگرچه بدست نشان دهیم که واحدهای مربوط به $\dot{m} g z_1$ و $\dot{m} \frac{V_1^2}{2}$ مناسبت دارند. واحدهای مربوط به $\dot{m} g z_1$

عبارت انداز: $\frac{kg}{s} \times \frac{m}{s^2} \times m = \frac{kg \cdot m}{s^2} \times \frac{m}{s} = \frac{N \cdot m}{s} = \frac{J}{s}$

که از $F = ma$ مشاهده می کنیم که $N = kg \cdot \frac{m}{s^2}$ در صورتیکه واحدهای مناسب در بخش های معادلات

ها ولرد شوند واحدها همانطوری که انتظاری بود بدست می آیند. مثلاً واحدهای مربوط به $\dot{W}_T$ با بستی $\frac{J}{s}$ باشند.

۱۹- آب در محق $40 cm$ تین یک لوله فاضلاب به قطر $100 cm$ جریان دارد دبی جریان و دبی جری را در صورتیکه

سرعت متوسط $3 \frac{m}{s}$ باشد معاسبه کنید؟ $Q = AV = 1 \times 0.1 \times 3 = 0.3$

$\dot{m} = \rho Q = 1000 \times 0.3 = 300$

۲۱- هوا در کانالی به قطر $20 cm$ در $120^\circ C$ و $120 kPa$ با دبی جری $5 \frac{kg}{s}$ جریان دارد کانالی دایروی به

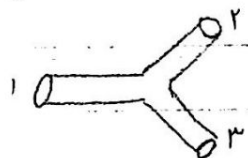
کانالی مربعی به ضلع $20 cm$ تبدیل می شود که در آن دما و فشار به ترتیب $150^\circ C$ و $140 kPa$ می باشند

سرعت هاراد هر دو مقطع کانال تعیین کنید؟ $\dot{m} = \rho Q = 1 Q \rightarrow Q = 5 \frac{kg}{s}$

$Q = AV \rightarrow (0.1)^2 \times \pi \times V \rightarrow V = \frac{5}{0.1 \times \pi}$
 $V \times 0.1 \times 0.1 \rightarrow V = \frac{5}{0.1}$

۲۳- آب در لوله ای به قطر $4 cm$ در $20 \frac{m}{s}$ جریان دارد لوله به دو لوله یکی به قطر $2 cm$ و دیگری به قطر $3 cm$

تقسیم می شود در صورتیکه $10 \frac{kg}{s}$ از لوله با قطر $2 cm$ جریان یابد دبی جریان از لوله به قطر $3 cm$ را



① $\begin{cases} D_1 = 4 cm \\ V_1 = 20 \frac{m}{s} \end{cases}$

② $\begin{cases} D_2 = 2 cm \\ \dot{m}_2 = 10 \frac{kg}{s} \end{cases}$

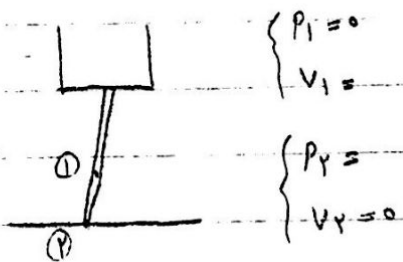
معاسبه کنید؟ $\dot{m}_1 = ?$ $\dot{m}_2 = ?$ $V = ?$
 $\begin{cases} D_2 = 3 cm \\ Q = ? \\ \dot{m} = ? \end{cases}$

$\dot{m}_1 = \rho AV = 1000 \times \frac{\pi (0.04)^2}{4} \times 20 = 251.1$

$\dot{Q}_1 = AV = \frac{\dot{m}}{\rho} = \frac{251.1}{1000} = 0.2511 (\frac{m^3}{s})$

۲۵- هوای بی سرعت در 20°C و 100 kPa مخلوق، سرخ مجرای در 75% جریان دارد، جریان دستفونیک یک تغییر ناگهانی (موج ضربه‌ای) تا 242% و 438°C بدون تغییر در ابعاد مجرای شود. دبی جری و فشار پایین دست وارد سرعتیکه مجرای دارای مساحت مقطع 500 cm^2 باشد بدست آورید؟
۲.??

۳۴- جت سرعت بالا برای بریدن مواد جامد مورد استفاده قرار می‌گیرد. حداکثر فشار ایجاد شده روی ماده را برآورد کنید در سرعتیکه سرعت خارج شونده از جت آب برابر باشد با 100% (الف) 100%



$$\frac{v_2^2}{2g} + \frac{P_2}{\rho g} + z_2 = \frac{v_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\rho g}$$

۹- نازلی به یک شلنگ به قطر ۴ cm وصل شده است به طوری که فاز افقی آب را با زاویه ۹۰ درختن می دهد خروجی نازل

درای قطر ۳ cm بوده و در پی جریان $500 \frac{L}{min}$ می باشد. مؤلفه های نیروی آب روی نازل و مقدار نیروی

برای رابست آوردید. فشار درون شلنگ ۴۰۰ kPa بوده و آب به اتمسفر تخلیه می شود.

ابتدا حجم کنترل بایستی ترسیم شود زیرا دو صورت مسئله در رفته است آن به صورت نشان داده شده در شکل ۱۴.۴

ظاهر می شود حجم کنترل آب را با مؤلفه های نیروی نازل روی آب نشان می دهد سرعت هابه صورت زیر معاسب می شوند

$$V_1 = \frac{Q}{A_1} = \frac{0.15 \times 0.14}{\pi \times 0.03^2} = 2.95 \text{ s}$$

$$V_2 = 4 \times V_1 = 11.79 \frac{m}{s}$$

فشار P_1 با استفاده از معادله انرژی بدست می آید. افت هائ جریان

نشا بدر حجم برقی شده اند.

$$\frac{V_1^2}{2} + \frac{P_1}{\rho} + g z_1 = \frac{V_2^2}{2} + \frac{P_2}{\rho} + g z_2 \quad P_1 = 1000 \left(\frac{11.79^2 - 2.95^2}{2} \right) = 45150 \text{ Pa}$$

معادله میمنتوم مؤلفه های نیرو را در آن می دهد

$$P_1 A_1 - F = \rho h (V_2 z_2 - V_1 z_1)$$

$$45150 \times \pi \times 0.03^2 - F = - (0.15 \times$$

حل سر کلاس :

$$Q_1 = A_1 V_1$$

$$V_1 = \frac{Q_1}{A_1} = \frac{0.1508^3}{\pi \times (3 \times 10^{-2})^2} \rightarrow V_1 = 2.93 \frac{m}{s}$$

$$V_2 = \left(\frac{D_1}{D_2} \right)^2 V_1 \rightarrow V_2 = \left(\frac{4}{3} \right)^2 2.93 = 11.73 \frac{m}{s}$$

$$\sum F_m = m (V_{2x} - V_{1x}) \rightarrow P_1 A_1 - F_{ex} = m (0 - 2.93)$$

$$(400 \times 10^3 \times (3 \times 10^{-2})^2) - F_{ex} = 11.3 (0 - 2.93)$$

$$F_{ex} = 1155 \text{ N}$$

$$500 \frac{L}{min} \times \frac{1 m^3}{1000} \times \frac{1 min}{60 s} = \frac{5}{6} \times 10^{-2}$$

$$\dot{m} = \rho Q$$

۱۴-۱۹
۲۳-۲۸

$$\sum f_y = \dot{m} (v_{ry} - v_{iy})$$

$$f_y = 1,3 (11,72 - 0)$$

سوال ۲-

$$Q = A\bar{v} = 0,125 \times 2,2 \times 2,2 = 1,9 \frac{m^3}{s}$$

$$z_1 = 10m$$

$$\bar{v} = 2,2 \frac{m}{s}$$

$$z_1 = 10m$$

$$\eta_T = 0,88$$

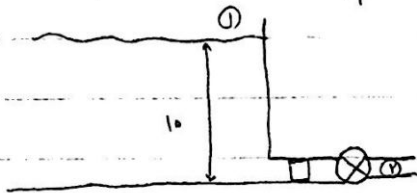
$$W_T = ?$$

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1 = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + h_L$$

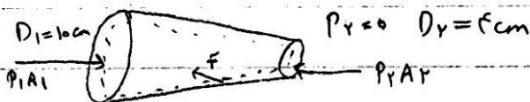
در سطح آب، v را صرف نظر می‌کنیم
چون بین هم مستند و بزرگ

$$\dot{W}_S = \dot{m} g z_1 = (\rho \times Q) g \times z_1 = 1000 \times 1,9 \times 10 \times 10 = 190000 \frac{J}{s}$$

$$W_T = \eta_T \times \dot{W}_S = 0,88 \times 190000 = 167200$$



سوال ۴-



$$Q = 0,08 \frac{m^3}{s}$$

$$\sum F = \dot{m} (v_{r1} - v_{i1})$$

$$p_1 A_1 - p_2 A_2 + F = \dot{m} (v_2 - v_1)$$

$$v_1 = \frac{Q}{A} = \frac{0,08}{25 \pi \times 10^{-4}}$$

$$v_2 = \frac{A_1}{A_2} v_1$$

$$\frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + g z_2 = \frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + g z_1$$

$$p_1 = 2 \rho (v_2^2 - v_1^2) \rightarrow p_1 A_1 - F = \rho Q (v_2 - v_1)$$

فصل ۵

۱۴- اگر در یک جریان صفحه‌ای مؤلفه‌های سرعت به صورت زیر داده شده:

$$u(x, y) = 8x^2 + 8y^2 \quad v(x, y) = 8xy$$

در $m(1, 2)$ چه قدر است؟ اگر در آن نقطه $\frac{kg}{m^2} = 2$ باشد.

$$\frac{DP}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \rightarrow u \frac{\partial P}{\partial x} + v \frac{\partial P}{\partial y} + w \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial P}{\partial t} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0$$

$$\frac{DP}{Dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{V} = -2(14u + 8u + 0) = -2(14 + 8) = -48 \frac{kg}{m^2.s}$$

۱۵- میدان سرعت برای یک جریان صفحه‌ای دایره‌ای $(w=0)$ از هوا به صورت زیر است:

$$u(x, y) = \frac{cy}{x^2 + y^2} \quad v(x, y) = \frac{-cx}{x^2 + y^2}$$

$$\text{plan flow} = \frac{\partial}{\partial z} = 0, w=0$$

$$\frac{DP}{Dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{V} \rightarrow \left[\frac{DP}{Dt} = -\rho \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right] = -\rho \left[\frac{-2y(-cy)}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{-2x(-cx)}{(x^2 + y^2)^2} \right]$$

$$\frac{8xy + 8xy}{(x^2 + y^2)^2} = 0 \quad \text{تراکم ناپذیر}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad \text{شرط تراکم ناپذیر بودن}$$

نشان دهید که یک جریان تراکم ناپذیر است.

۱۴- اگر $u(x, y) = 4 + \frac{16y}{x^2 + y^2}$ در یک جریان صفحه‌ای تراکم ناپذیر باشد در صورتی که $v(x, 0) = 0$ باشد مقدار $v(x, y)$ را بیابید؟

۱۷- اگر $v(x, y) = \frac{8 + 4y}{x^2 + y^2}$ در یک جریان صفحه‌ای تراکم ناپذیر باشد در صورتی که $u(x, y) = 0$ باشد مقدار $u(x, y)$ را بیابید؟

۱۸- مؤلفه‌ی سرعت در یک جریان صفحه‌ای تراکم ناپذیر $\cos \theta = \left(25 + \frac{1}{r^2} \right)$ است در صورتی که $V_r(2, \theta) = 0$ باشد مقدار $V_\theta(2, \theta)$ را بیابید؟

۱۹- مولفey سرعت در يك جريان منحنای تركيزناپذير $V_\theta = -2\Delta \left(1 + \frac{1}{r^2}\right) \sin\theta + \frac{\Delta}{r^2}$ (ست در صورتی كه

$V_r(2, 90^\circ) = 0$ مقدار $V_r(r, \theta)$ را پايابيد.

$$\frac{DP}{Dt} + \rho \cdot \nabla V = 0 \quad \text{تركيزناپذير} \rightarrow \frac{DP}{Dt} = 0 \rightarrow \rho \cdot \nabla V = 0 \rightarrow \nabla \cdot V = 0 \quad (-19) \checkmark$$

$$\nabla V = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0 \quad u(x, y) = x + \frac{xy}{(x^2 + y^2)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2(x^2 + y^2) - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x} \rightarrow v = \int -\frac{\partial u}{\partial x} dy + C$$

$$v = \int \frac{2x^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy + C = \frac{-2y}{(x^2 + y^2)} + C \rightarrow 0 = \frac{-2 \cdot 0}{x^2 + 0} + C \rightarrow C = 0 \quad v = \frac{-2y}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{DP}{Dt} + \rho \nabla V = 0 \quad \text{تركيزناپذير} = \frac{DP}{Dt} = 0 \quad \rho \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right] = 0 \quad (-18) \checkmark$$

$$\left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_r) = -\frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} \right) \rightarrow r V_r = - \int \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} d\theta \rightarrow r V_r = - \int \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} d\theta + C$$

$$V_\theta = - \left(2\Delta + \frac{1}{r^2} \right) \cos\theta, \quad V_r(0, 0) = 0$$

$$\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} = + \left(2\Delta + \frac{1}{r^2} \right) \sin\theta \quad r V_r = - \int \left(2\Delta + \frac{1}{r^2} \right) \sin\theta d\theta + C$$

$$r V_r = - \Delta r \sin\theta + \frac{1}{r} \sin\theta + C_1 \rightarrow V_r = \left(-2\Delta + \frac{1}{r^2} \right) \sin\theta + C$$

$$V_r = 0 \xrightarrow{\theta=0} 0 = \left(-2\Delta + \frac{1}{r^2} \right) \sin(0) + C \rightarrow C = 0 \quad V_r = \left(-2\Delta + \frac{1}{r^2} \right) \sin\theta$$

$\hat{i} \cdot \hat{i} = 1$ $\hat{i} \cdot \hat{j} = 0$ $\hat{i} \cdot \hat{k} = 0$
 $\hat{j} \cdot \hat{j} = 1$ $\hat{j} \cdot \hat{k} = 0$
 $\hat{k} \cdot \hat{k} = 1$ $\hat{j} \cdot \hat{i} = 0$
 $\hat{i} \cdot \hat{j} = 0$

۲۳- با استفاده از معادلات فرزن جریان پایا، اعتبار کنید، $\frac{D\vec{V}}{Dt} = (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V}$

$\frac{D\vec{V}}{Dt} = (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V}$ $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial w}{\partial t} = 0$ چون جریان پایدار است.

$\frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{Du}{Dt} \hat{i} + \frac{Dv}{Dt} \hat{j} + \frac{Dw}{Dt} \hat{k}$

$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = (\hat{u}\hat{i} + \hat{v}\hat{j} + \hat{w}\hat{k}) \cdot (\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}) = \vec{V} \cdot \nabla u$

$\frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = (u\hat{i} + v\hat{j} + w\hat{k}) \cdot (\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}) = \vec{V} \cdot \nabla v$

$\frac{Dw}{Dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = (u\hat{i} + v\hat{j} + w\hat{k}) \cdot (\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}) = \vec{V} \cdot \nabla w$

$\vec{V} \cdot \nabla u + \vec{V} \cdot \nabla v + \vec{V} \cdot \nabla w = \vec{V} \cdot \nabla (u\hat{i} + v\hat{j} + w\hat{k}) = (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V}$ حل کلاسی:

$\frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + u \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{V}}{\partial z}$

$(\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = [(u\hat{i} + v\hat{j} + w\hat{k}) \cdot (\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k})] \vec{V}$

$(\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = (u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}) \vec{V} = u \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{V}}{\partial z}$ اگر جریان پایدار باشد صاف است

۲۴- تغییر فشار ∇p را برای جریان تراکم ناپذیر مستطبی ۱۵.۵ با فرض جریان غیر ویسکوز با اثرات گرانش قابل صرف نظر بیابید؟

$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\nabla p + \rho \vec{g}$ در این حالت ρ مغیر نیست برانتر مغیر می شود.

$x: \rho (\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x$

$y: \rho (\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z}) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y$

اتفاق

$z: \rho (\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z}) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z \rightarrow \frac{\partial p}{\partial z} = \rho g_z \rightarrow \frac{dp}{dz} = \rho g_z$

$\Delta p = \rho g h$

۱- مغیر فرض کردن سهم تراکم پذیری و ویسکوز ۲- مغیر فرض کردن فقط سهم ویسکوز ۳- با فرض وجود ویسکوزیته و سهم تراکم پذیری

برای جریان تراکم ناپذیر مغیر است تک تک مغیر نیست پس ۲ معتدل $u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}$ و در سطح

۲۵- معادله ی ناویر استوکس را برای جریان بین صفحات موازی با فرض $u = u(y)$ و گرانش در راستای z ساده کنید فرزن برای

است که خطوط جریان موازی صفحات هستند بطوریکه $v = w = 0$ است؟ چون نقطه تابع y است

$x: \rho (\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu (\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}) + \rho g_x$ $\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu (\frac{\partial^2 u}{\partial y^2})$

$\vec{V} = w = 0$ $v = u(y)$ $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\Delta p}{L}$ $v = w = 0$ آن ها را این نویسیم.

اتفاق

$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \rightarrow \frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \rightarrow \frac{\partial (\frac{\partial u}{\partial y})}{\partial y} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x}$

$\rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\mu} \frac{\Delta p}{L} y + C_1$ $\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \rightarrow C_1 = 0$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\mu} \frac{\Delta P}{L} y \rightarrow du = \frac{1}{\mu} \frac{\Delta P}{L} y dy \xrightarrow{\text{انتگرال}} u = \frac{1}{\mu} \frac{\Delta P}{L} \frac{y^2}{2} + C$$

$$u = \frac{1}{2\mu} \frac{\Delta P}{L} b^2 + C_1 \quad C_1 = -\frac{1}{2\mu} \frac{\Delta P}{L} b^2 \quad u = 0 \quad y = b \quad \text{در دیواره}$$

$$u = \frac{1}{2\mu} \frac{\Delta P}{L} y^2 - \frac{1}{2\mu} \frac{\Delta P}{L} b^2 \quad v = -\frac{\Delta P}{2\mu L} b^2 \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)$$

۲۷- معادله‌ی ناویر-استوکس را برای جریان داخل یک لوله با فرض $v_z = v_z(r)$ و گرانش در راستای z ساده کنید. خطوط جریان

نقش شده اند مولژی با دیواره‌ی لوله هستند به نحوی که $v_\theta = v_r = 0$ است؟ با توجه به هندسه کتاب

$$v_z = v_z(r) \quad v_\theta = v_r = 0$$

$$r \text{ جهت } 0 - 0 = -\frac{\partial p}{\partial r} + 0 + 0$$

$$\theta \text{ جهت } 0 - 0 = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + 0 + 0$$

$$z \text{ جهت } \rho \frac{Dv_z}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z + \mu \nabla^2 v_z$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_\theta \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z + \mu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}$$

۲۸- استوانه‌ی داخلی از دو استوانه‌ی هم مرکز می‌چرخد که نتیج به سمت $v_\theta = v_\theta(r)$ و $v_z = 0$ است. معادلات مورد نیاز برای

یافتن پروفیل سرعت و با فرض محدود بودن استوانه‌ها چیست؟

گرایش فشار ∇P را برای جریان تراکم ناپذیر و سستای ۲.۵ با فرض جریان غیر دیسکنت با انزلیت گرایش قابل چشم پوشی باید؟

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-14xy}{(x^2+y^2)^2} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{14x^2y - 14y^3}{(x^2+y^2)^2} = \frac{14x^2 - 14y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{-14x^3 + 14xy^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{14y^2 - 14x^2}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{14xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\nabla v = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\rho \left(\frac{-34xy^2}{(x^2+y^2)^3} - \frac{14(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\rho \left(\frac{14y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3} - \frac{34xy^2}{(x^2+y^2)^3} \right) = \frac{\partial p}{\partial y}$$

$$\nabla p = \frac{\partial p}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \hat{k} = \frac{-14}{(x^2+y^2)^3} [x(x^2+y^2)\hat{i} + y(x^2+y^2)\hat{j}] + \rho g \hat{k}$$