جلسه سوم
ریاضی۲

— حد و پیوستگی توابع چند متغیره

مفهوم حد توابع چند متغیره شبیه حد توابع یک متغیره می باشد. برای روشن شدن موضوع، تعریف را فقط برای توابع دو متغیره ارائه می دهیم؛ این تعریف قابل تعمیم برای توابع با بیش از دو متغیر نیز می باشد.

تعریف: فرض کنید $f(x,y)$ یک تابع دو متغیره باشد. اگر وقتی نقطه (x,y) از هر مسیری در صفحه xy به نقطه (a,b) نزدیک شود، مقدار $f(x,y)$ به عدد L نزدیک گردد، گوییم حد تابع f در نقطه (a,b) برابر L است و می نویسیم:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$$

نکته ۱: در حد توابع تک متغیره برای محاسبه $\lim_{x \to a} f(x)$ ، برای نزدیک شدن به a ،
دو مسیر چپ و راست وجود داشت ولی در حد توابع دو متغیره برای محاسبه $\lim_{(x,y) \to (a,b)} f(x,y)$
برای نزدیک شدن به نقطه (a,b) ، مسیرهای بسیار زیادی وجود دارد.

به عنوان نمونه برای نزدیک شدن به نقطه $(0,0)$ از مسیرهای $y=0$ ، $x=0$ ، $y=x$ ، $y=-x$ ، $y=x^2$ ، $y=x^3$ و ... می توان به نقطه $(0,0)$ نزدیک شد.

اگر تابع دارای حد باشد، از تمام این مسیرها باید مقدار حد، عدد ثابتی به دست آید.

نکته ۲: حد توابع چند متغیره نیز مانند حد توابع تک متغیره تا هنگامی که به صورت مبهم در نیامده است به کمک تعدادی قضیه قابل محاسبه می باشد.

مثال: حد های زیر را به کمک فضاپای حد محاسبه کنید.

۱) $\lim\limits_{(x,y)\to(3,2)} (2x+y^2) = 2(3)+(2)^2 = 6+4=10$

۲) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)} \dfrac{x^2 y}{x+y} = \dfrac{(0)^2(2)}{0+2} = \dfrac{0}{2} = 0$

۳) $\lim\limits_{(x,y)\to(\pi/3,2)} y\sin\left(\dfrac{x}{y}\right) = 2\sin\left(\dfrac{\pi/3}{2}\right) = 2\sin(\pi/6) = 2\times\dfrac{1}{2} = 1$

۴) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \sqrt{9-x^2+y^2} = \sqrt{9-(1)^2+(2)^2} = \sqrt{9-1+4} = \sqrt{12}$

٥) $\lim\limits_{(x,y)\to(e,1)} \ln(x^2y^3) = \ln(e^2(1)^3) = \ln e^2 = 2\ln e = 2$

٦) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,1)} x\cos^{-1}(y-1) = 2\cos^{-1}(1-1) = 2\cos^{-1}(0) = 2(\frac{\pi}{2}) = \pi$

٧) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2-xy}{x^3-y^3} = \frac{(1)^2-(1)(1)}{(1)^3-(1)^3} = \frac{0}{0}$ مبهم

رفع ابهام $\Longrightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2-xy}{x^3-y^3} = \lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x\cancel{(x-y)}}{\cancel{(x-y)}(x^2+xy+y^2)} = \lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x}{x^2+xy+y^2} = \frac{1}{1^2+(1)(1)+(1)^2}$

$= \frac{1}{1+1+1} = \frac{1}{3}$

مثال : نشان دهید که :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2} = 0$$

حل :

حد این تابع به صورت $\frac{0}{0}$ درمی‌آید و از روش های معمول نمی توان رفع ابهام کرد. برای اثبات فرض کنیم $\varepsilon>0$ داده شده باشد. $\delta>0$ را طوری می یابیم که :

$$0<\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}<\delta \Rightarrow \left|\frac{x^3}{x^2+y^2}-0\right|<\varepsilon$$

چون داریم : $|x|=\sqrt{x^2}\leq\sqrt{x^2+y^2}$ پس می توان نوشت :

$$\left|\frac{x^3}{x^2+y^2}\right| = \frac{|x|^3}{|x^2+y^2|} \leq \frac{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3}{x^2+y^2} = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\Rightarrow 0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta \Rightarrow \left|\frac{x^3}{x^2+y^2}\right| \leq \sqrt{x^2+y^2} < \delta = \varepsilon$$

لذا کافی است $\delta\leq\varepsilon$ اختیار کنیم. بنابراین حد تابع در نقطه $(0,0)$ برابر صفر است.

پایان جلسه سوم

محمدپور