پیش از این در جلسات گذشته، مباحث مجموعه‌ها زوج مرتب، ضرب دکارتی، رابطه، رابطه وارون، تعریف تابع، رسم نمودار تابع، آزمون خط قائم، ترکیب دو تابع، تابع زوج و فرد و تابع یک به یک تدریس گردید. حال به بررسی چند تابع خاص می‌پردازیم:

۱. تابع ثابت

تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ را یک تابع ثابت می‌گوییم هرگاه به ازای هر ورودی x از دامنه ، خروجی مقدار ثابتی (عددی) مانند c باشد یعنی برای هر x داشته باشیم $f(x)=c$.

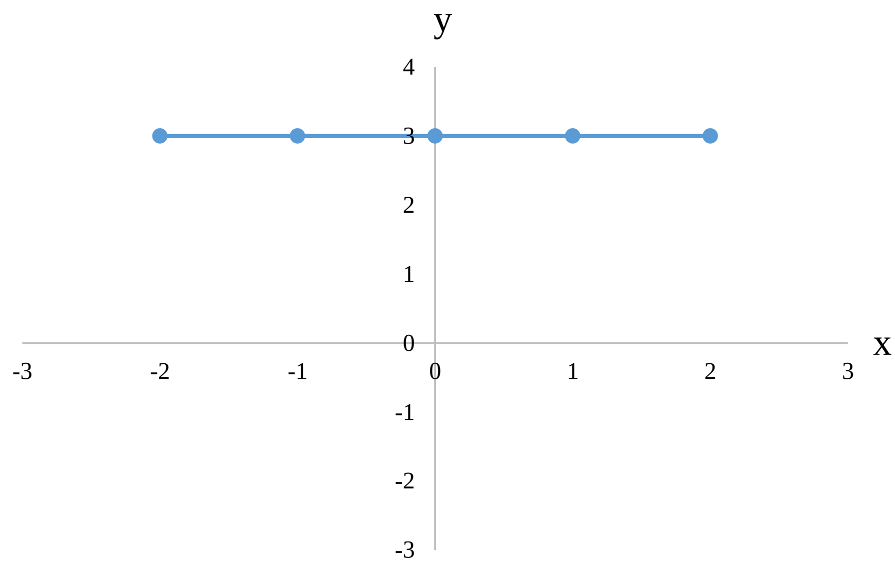
به طور کلی تابع ثابت به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x &\mapsto c \end{aligned}$$

مثال **:** تابع $f(x)=3$ یک تابع ثابت است زیرا شما هر مقداری که برای x انتخاب کنید، خروجی عدد ثابت ۳ خواهد بود. جدول زیر را ببینید:

x	-2	-1	0	1	2
y	3	3	3	3	3

حال نمودار این تابع را رسم می کنیم.



همان طور که در شکل بالا می‌بینید، نمودار تابع ثابت، یک خط افقی **است** که به موازات محور x ها امتداد می‌یابد **.** دامنه تابع ثابت، مجموعه اعداد حقیقی یعنی $\mathbb{R}$ می‌باشد .

تمرین: نمودار توابع زیر را رسم نمایید.

$f(x) = -2$

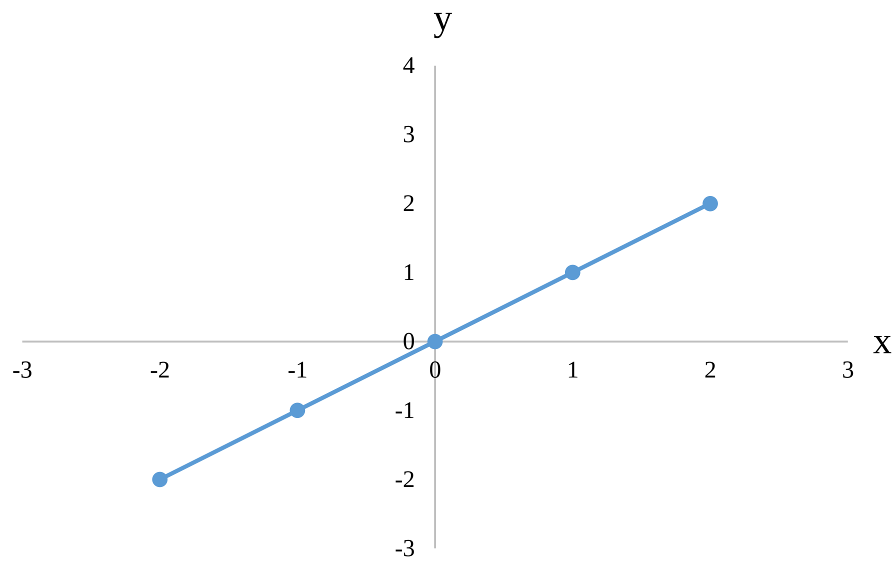
$f(x) = -\frac{1}{4}$

۲. تابع همانی

تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ را یک تابع همانی می‌گوییم هرگاه به ازای هر ورودی x از دامنه، خروجی برابر با خودش باشد یعنی برای هر x داشته باشیم $f(x) = x$. جدول زیر را ببینید:

x	-2	-1	0	1	2
y	-2	-1	0	1	2

حال نمودار این تابع را رسم می کنیم.



همان طور که در شکل بالا می‌بینید، نمودار تابع همانی، نیمساز ربع اول و سوم در دستگاه مختصات می‌باشد . دامنه و برد تابع همانی، مجموعه اعداد حقیقی یعنی $\mathbb{R}$ می‌باشد .

جبر توابع:

مجموع:

برای دو تابع f و g که روی دامنه‌های دلخواهی تعریف شده‌اند مجموع توابع f و g تابعی است که با $f+g$ نشان می‌دهیم که روی $D_f \cap D_g$ تعریف شده است و برای هر مقدار x در این مجموعه داریم :

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$$

تفاضل:

برای دو تابع f و g که روی دامنه‌های دلخواهی تعریف شده‌اند تفاضل تابع g از f تابعی است که با $f-g$ نشان می‌دهیم که روی $D_f \cap D_g$ تعریف شده است و برای هر مقدار x در این مجموعه داریم :

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$$

حاصلضرب:

برای دو تابع f و g که روی دامنه‌های دلخواهی تعریف شده‌اند حاصلضرب توابع f و g تابعی است که با $f.g$ نشان می‌دهیم که روی $D_f \cap D_g$ تعریف شده است و برای هر مقدار x در این مجموعه داریم :

$$(f.g)(x)=f(x).g(x)$$

تقسیم:

برای دو تابع f و g که روی دامنه‌های دلخواهی تعریف شده‌اند تقسیم تابع f بر g تابعی است که با $\frac{f}{g}$ نشان می‌دهیم که روی $D_f \cap D_g$ برای xهایی تعریف شده است که $g(x)\neq 0$ و برای هر مقدار x در این مجموعه داریم :

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$$

ترکیب:

اگر دو تابع f و g که روی دامنه‌های دلخواهی تعریف شده‌اند بگونه‌ای باشند که برد تابع g زیر مجموعه تابع f باشد آنگاه ترکیب این دو تابع بصورت زیر تعریف می‌شود :

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))$$

مثال:توابع $f(x)=2$ و $g(x)=x$ را در نظر بگیرید. برای این دو تابع مجموع، تفاضل، حاصلضرب، تقسیم و ترکیب آنها را محاسبه نمایید.

$$f(x)+g(x)=2+x$$
$$f(x)-g(x)=2-x$$
$$f(x).g(x)=2.x=2x$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{2}{x}$$
$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x)=2$$

رسم نمودار هرکدام از این توابع بدست آمده نیز مانند قبل است و ابتدا باید مقداردهی انجام داده و بعد نمودار مربوطه را رسم نمایید لذا از رسم نمودار آنها صرفنظر می‌کنیم.

تمرین: توابع $f(x)=2x$ و $g(x)=3$ را در نظر بگیرید. برای این دو تابع مجموع، تفاضل، حاصلضرب، تقسیم و ترکیب آنها را محاسبه و نمودار هر یک را رسم نمایید.

۳.تابع قدر مطلق

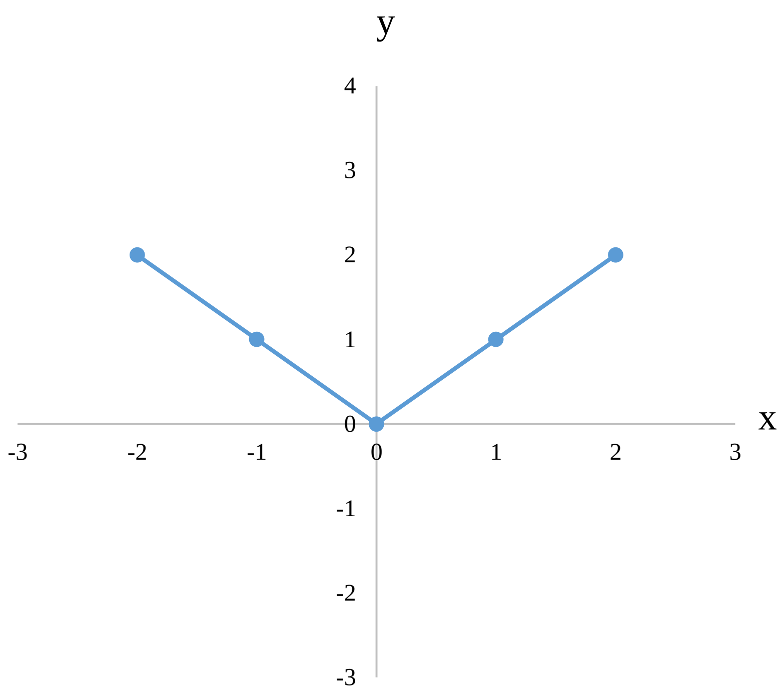
تابع f را یک تابع قدرمطلق می‌گوییم هرگاه به ازای هر ورودی x از دامنه داشته باشیم :

$$f(x)=|x|=\begin{cases} x & ;x\ge 0 \\ -x & ;x\le 0 \end{cases}$$

جدول زیر را ببینید:

x	-2	-1	0	1	2
y	2	1	0	1	2

حال نمودار این تابع را رسم می کنیم.



همان طور که در شکل بالا می‌بینید، نمودار تابع قدرمطلق، نیمساز ربع اول و دوم در دستگاه مختصات می‌باشد . دامنه تابع قدرمطلق، مجموعه اعداد حقیقی یعنی $\mathbb{R}$ می‌باشد .

۴.تابع جزء صحیح

ابتدا به چند جمله زیر توجه کنید:

- جزء صحیح عدد 2.35، عدد 2 است.
- جزء صحیح عدد -4.36، عدد -5 است.
- جزء صحیح عدد -1، عدد -1 است.

ویژگی مشترک سه عبارت بالا چیست؟ همان‌طور که شما هم پی برده‌اید، برای نوشتن جزء صحیح یک عدد، نزدیک‌ترین عدد صحیح کوچک‌تر یا مساوی با آن را نوشته‌ایم. در حقیقت می‌توان گفت، عبارت جزء صحیح یک عدد، معادل عبارت نزدیک‌ترین عدد صحیح کوچک‌تر یا

مساوی با آن عدد است. برای تعریف جزء صحیح، معمولاً عبارت بزرگ‌ترین عدد صحیح کوچک‌تر یا مساوی را نیز به‌کار می‌برند بنابراین:

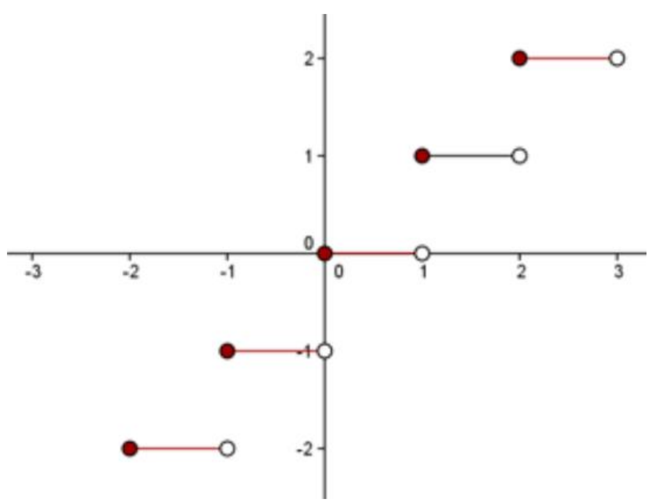
تابع f را یک تابع جزء صحیح می‌گوییم هرگاه به ازای هر ورودی X از دامنه داشته باشیم :

$$f(x)=[x]$$
$$[x]=n \Leftrightarrow n \le x \le n+1$$

جدول زیر را ببینید:

x	-2≤x<-1	-1≤x<0	0≤x<1	1≤x<2	2≤x<3
y	-2	-1	0	1	2

حال نمودار این تابع را رسم می کنیم.



همانطور که می‌بینید نمودار جزء صحیح شبیه پلکان است. اصطلاحا به چنین توابعی توابع پله‌ای گفته می‌شود.

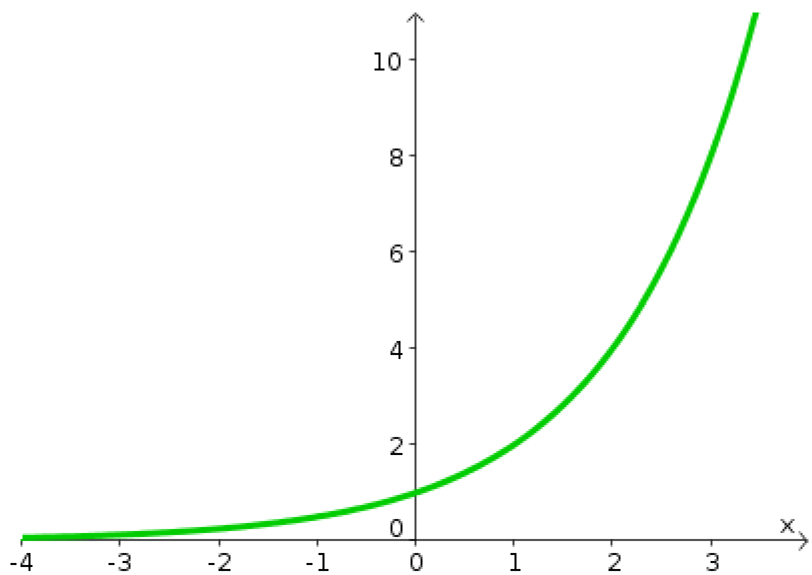
تمرین: نمودار تابع $f(x)=[x+2]$ را رسم نمایید.

۵.تابع نمایی

تابع نمایی، تابعی است به فرم $f(x)=a^x$ ، که پایه a ، عددی ثابت، مثبت و مخالف ۱ است.

عدد گنگ $e \simeq 2.7182...$ را عدد نپر می‌نامیم و از این به بعد منطور ما از تابع نمایی $f(x)=e^x$ است .

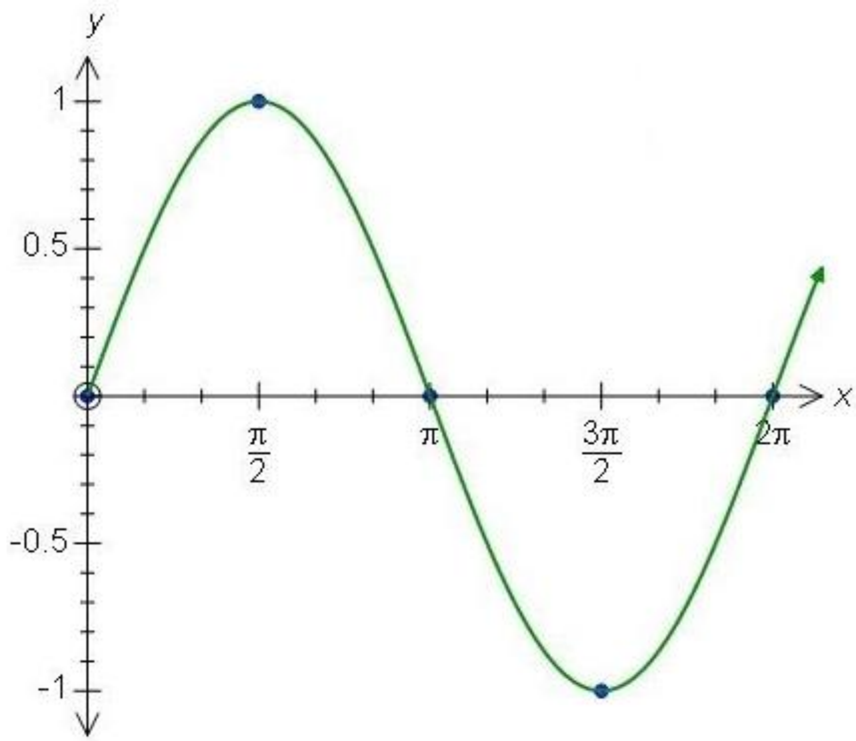
نمودار این تابع بصورت زیر است.



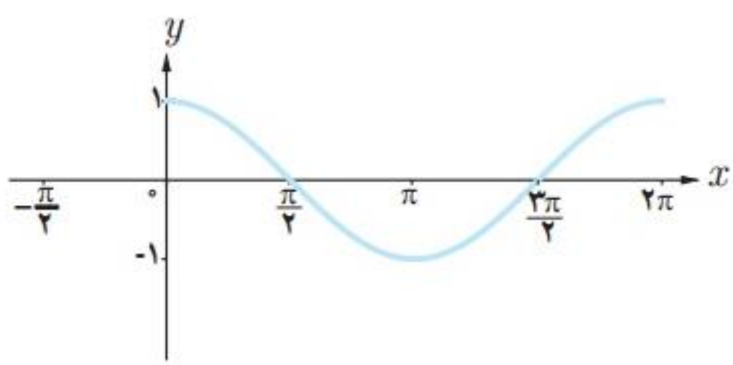
۶.توابع مثلثاتی

در مبحث توابع مثلثاتی ما فقط به دو تابع سینوس و کوسینوس و نمودارهای آنها بسنده می‌کنیم.

$f(x) = \sin x$



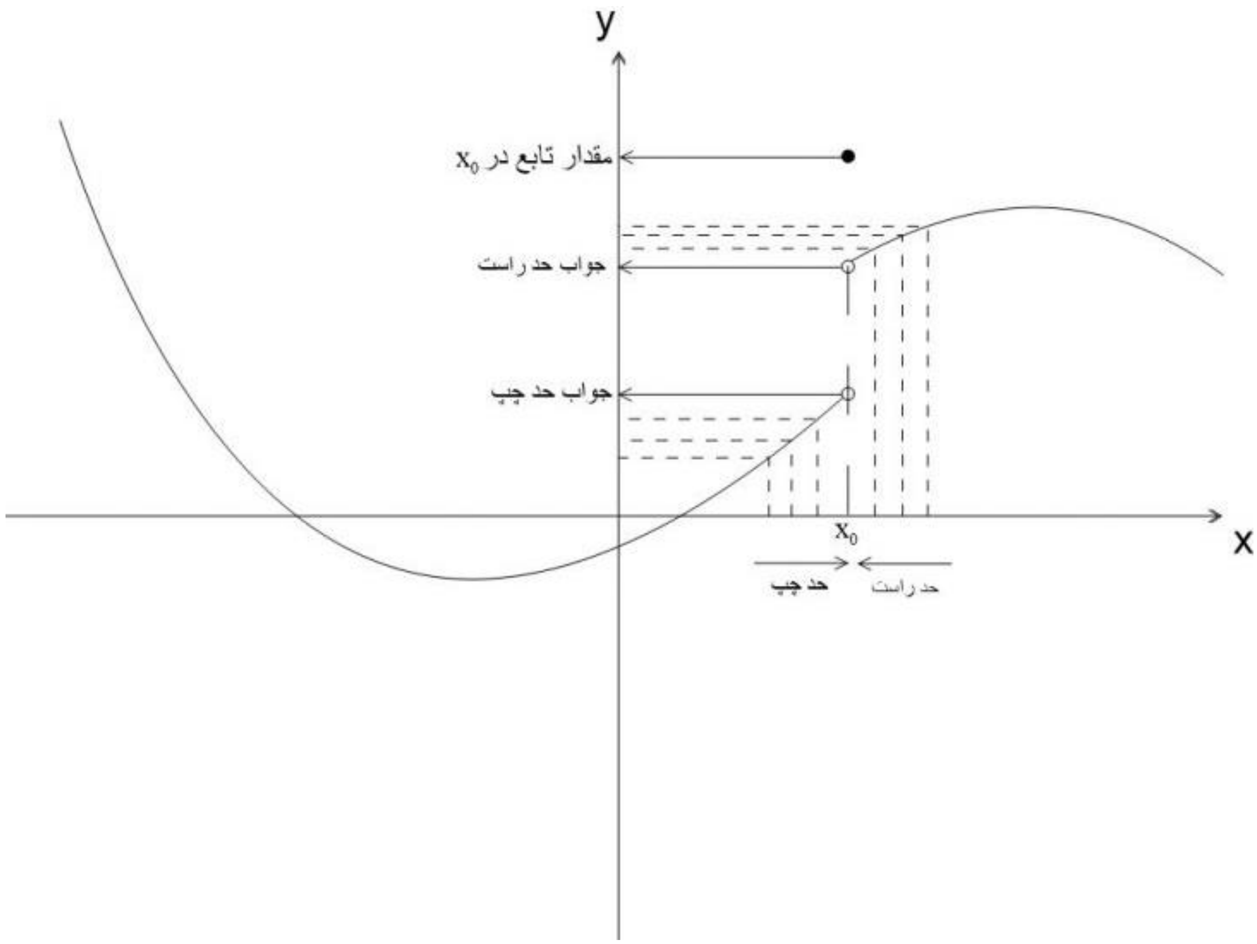
$f(x) = \cos x$



حد

حد چپ و راست:

اگر x از سمت عددهای بزرگتر به نقطه مورد نظر نزدیک شود حد راست و اگر از سمت عددهای کوچکتر نزدیک شود حد چپ بدست می‌آید.



حد راست : $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$

حد چپ : $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$

برای اینکه تابع در یک نقطه حد داشته باشد باید حد چپ و راست موجود و با هم برابر باشند.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=L\\ \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=L\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)=L$$

مثال: تابع $f(x)=[x]$ در $x=0$ حد ندارد زیرا:

$$\lim_{x\to 0^-}[x]=-1$$

$$\lim_{x\to 0^+}[x]=0$$

پس حد چپ و راست $f(x)=[x]$ در $x=0$ با یکدیگر برابر نیست. پس تابع در این نقطه حد ندارد.

تمرین:حد توابع زیر را در صورت زیر بدست آورید.

$$f(x)=[x]+2 \quad ;x\to 2$$

$$f(x)=2x+3 \quad ;x\to 3$$

$$f(x)=\frac{x-1}{x^2} \quad ;x\to 4$$

$$f(x)=|x| \quad ;x\to -2$$

$$f(x)=\frac{|x|}{x} \quad ;x\to 0$$