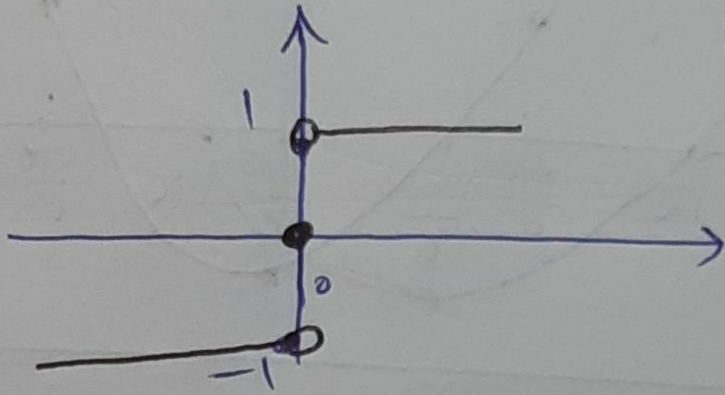


بنام خدا
جلسه سوم
ریاضی عمومی
محمدپور

تابع علامت (Sgn) به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$y = \text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } x > 0 \\ 0 & \text{اگر } x = 0 \\ -1 & \text{اگر } x < 0 \end{cases} \quad \text{یا } y = \frac{|x|}{x}$$

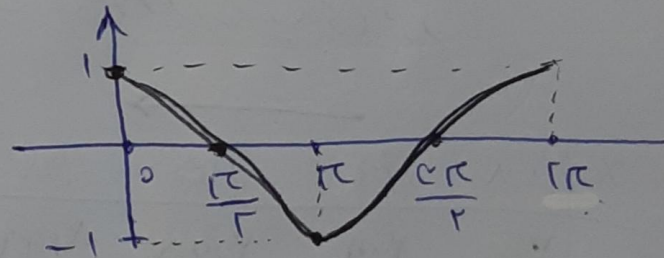
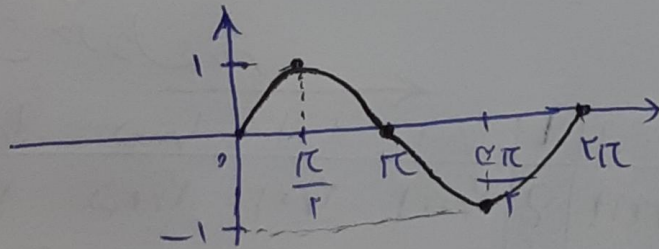
منحنی این تابع به صورت زیر است:



تابع سینوس و کسینوس : $y = \sin x$, $y = \cos x$ و رسم آن ها در بازه $[0, 2\pi]$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y = \sin x$	0	1	0	-1	0

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y = \cos x$	1	0	-1	0	1



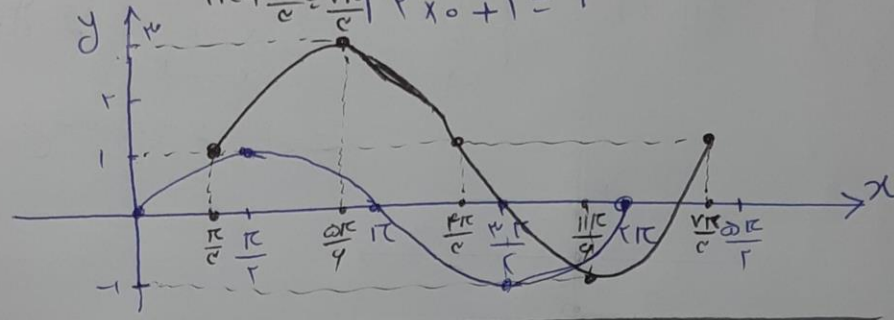
نتیجه : مقادیر $-1 \leq \sin x, \cos x \leq 1$

مثال: نمودار $y = 2 \sin(x - \frac{\pi}{3}) + 1$ را رسم کنید.

حل: برای رسم نمودار تابع فوق می‌توانیم با انتقال نمودار $y = \sin x$ به صورت زیر عمل می‌کنیم. مقدار x را به اندازه $\frac{\pi}{3}$ افزایش می‌دهیم و مقدار y را ابتدا دو برابر کرده و سپس با 1 جمع می‌کنیم.

x	$y = \sin x$
0	0
$\frac{\pi}{2}$	1
π	0
$\frac{3\pi}{2}$	-1
2π	0

x	$y = 2 \sin(x - \frac{\pi}{3}) + 1$
$0 + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$	$2 \times 0 + 1 = 1$
$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$	$2 \times 1 + 1 = 3$
$\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$	$2 \times 0 + 1 = 1$
$\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{11\pi}{6}$	$2 \times (-1) + 1 = -1$
$2\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{3}$	$2 \times 0 + 1 = 1$



تابع f را با ضابطه $f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}$ (حد) را در نظر می‌گیریم. بابت تابع $f(x)$ در $x = 1$

نامعین است اما می‌توانیم مقادیر $f(x)$ را به ازای مقادیر x که بتدریج چهار سمت صفر و چهار سمت راست به عدد 1 نزدیک می‌شود ارزینگی می‌کرد.

طبق جدول زیر:

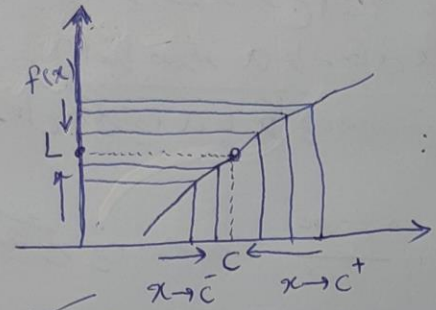
x	0.8	0.9	0.95	0.99	0.999	1	1.001	1.01	1.05	1.1
$f(x)$	2.18	2.19	2.195	2.199	2.1999	?	2.1001	2.101	2.105	2.11

مقادیر تابع در این جدول نشان می‌دهد هنگامی که x به عدد 1 نزدیک می‌شود مقادیر $f(x)$ به سوی عدد 3 میل می‌کند. این رفتار تابع را می‌توان به این صورت توصیف کرد:

حد $f(x)$ هنگامی که x به 1 میل کند برابر با 3 است و به طور خلاصه چنین نوشته می شود :

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$$

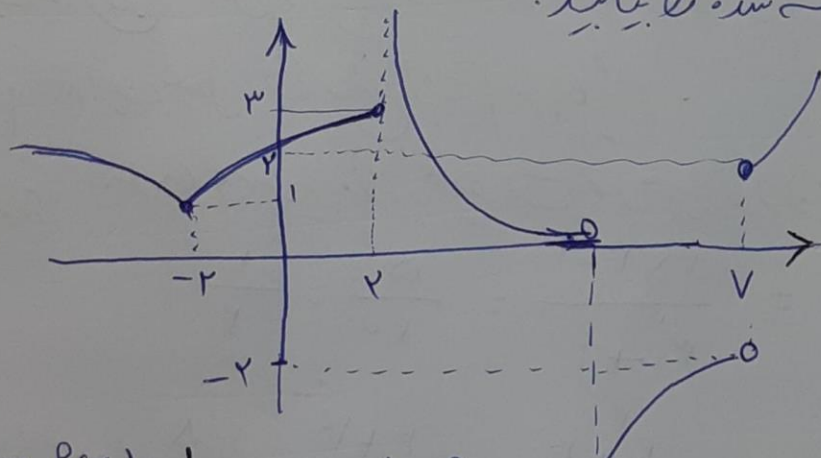
پس این می توان گفت :
اگر با نزدیک و نزدیک شدن x از هر دو طرف به c مقدار $f(x)$ به L نزدیک و نزدیک شود آنگاه L حد $f(x)$ است هنگامی که x به c میل می کند و این مفهوم L با علامت زیر می نویسیم :

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$$


تعبیر هندسی حد :

$x \rightarrow c^+$ می خوانیم : x از سمت راست به عدد c میل می کند
 $x \rightarrow c^-$ می خوانیم : x از سمت چپ به عدد c میل می کند

مثال: با توجه به نمودار جداولی خواص شده را بیابید.



$$\lim_{x \rightarrow -r^-} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -r^+} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow r^-} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow r^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow v^-} f(x) = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow v^+} f(x) = +\infty$$

روش معالیه حد توابع

۱- تابع چند جمله‌ای: حد تابع چند جمله‌ای اگر $x \rightarrow a$ میل کند برابر است

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \quad \text{با } f(a)$$

مثال: $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{2} x^3 - 2x + 1 \right) = \frac{1}{2} \times 2^3 - 2 \times 2 + 1 = 1$

۲- حد توابع کسری گویا که صورت و مخرج آن چند جمله‌ای است $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$

امکان پذیر است: (ابتدا مقدار a را به جای x قرار می‌دهیم)

الف) اگر حاصل جاگزینی a با x یک عدد حقیقی شمرده‌مان عدد حد تابع است.

ب) اگر حاصل جاگزینی به صورت $\frac{\text{عدد} \neq 0}{\text{صفر}}$ باشد گوئیم حد نامعین است

(اصطلاحاً ∞ حد = ∞)

ج) اگر حاصل جاگزینی $\frac{0}{0}$ شود حد مبهم است و باید با تجزیه

صورت و مخرج عامل در صفر کننده را پیدا کنیم و از صورت و مخرج حذف کنیم که این عمل را رفع ابهام می نامیم.

مثال: حدهای زیر را در صورت موجود بودن بیابید:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x-1}{x^2+1} = \frac{2 \times 3 - 1}{3^2 + 1} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+4}{x^2-4} = \frac{2^2+4}{2^2-4} = \frac{4+4}{4-4} = \frac{8}{0} \Rightarrow \text{حد ندارد}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{x^2-5x+4} = \frac{9-9}{9-5 \times 3+4} = \frac{0}{0}$$

صورت
صورت
با رفع ابهام کنیم

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+3}{x-2} = \frac{4}{2-2} = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 2} = \frac{2 - 2}{2 - 2} = \frac{0}{0}$$

صفر
صفر
رفع 4 مرتبه

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{2}{2+2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

پایان جلسه سوم